সংযুক্ত কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত
(Trigonometric Ratios of Associated Angles)

ইউনিট ৮

ভূমিকা

পূর্বের ইউনিটে আপনারা ত্রিকোণমিতিক কোণ, ত্রিকোণমিতিক কোণের অনুপাত, ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের সীমাবদ্ধতা, ধ্রুবতা, অনুপাতগুলির মৌলিক সম্পর্ক ইত্যাদি বিষয়ে জ্ঞান অর্জন করেছেন। এছাড়াও ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের মানের পরিবর্তন ও ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন করতে শিখেছেন। $-\theta$, $90^o\pm\theta$, $180^o\pm\theta$........ *এরূপ কোণকে* θ *কোণের সংযুক্ত কোণ বলা হয়। আবার ত্রিকোণমিতিক কোণ* A *ও* B *এর যোগ ও বিয়োগ করা যায়, এরূপ দুই বা ততোধিক কোণের বীজগণিতীয় যোগফলকে যৌগিক কোণ বলে। এই ইউনিটে ত্রিকোণমিতিক কোণের যোগ, বিয়োগ স্বতন্ত্র কোণ হিসাবে কিভাবে ব্যবহৃত হয় সে বিষয়ে আলোচনা করা হবে। এগুলো আপনাদের বিভিন্ন ত্রিকোণমিতিক কোণের মান নির্ণয়ে সাহায্য করবে। এছাড়াও ত্রিভুজের সাইন (sine) সূত্র, কোসাইন (cosine) সূত্র ও ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল ইত্যাদি বিষয়ে আলোচনা করা হবে।*

ইউনিটের উদ্দেশ্য

এই ইউনিট শেষে আপনি -

- সংযুক্ত কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নির্ণয় ও প্রয়োগ করতে পারবেন,
- যৌগিক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নির্ণয় ও প্রয়োগ করতে পারবেন,
- গুণিতক ও উপগুণিতক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নির্ণয় ও প্রয়োগ করতে পারবেন,
- ত্রিকোণমিতিক অভেদাবলী সম্পর্কিত সমস্যার সমাধান করতে পারবেন,
- ত্রিভুজের সাইন (sine) ও কোসাইন (cosine) সূত্র প্রমাণ ও প্রয়োগ করতে পারবেন,
- ত্রিভুজের কোণের অনুপাতকে তার বাহুর মাধ্যমে প্রকাশ করতে পারবেন,
- ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল সম্পর্কিত সমস্যার সমাধান করতে পারবেন।

ইউনিট সমাপ্তির সময়	ইউনিট সমাপ্তির সর্বোচ্চ সময় ১৫ দিন

এই ইউনিটের পাঠসমূহ

পাঠ ৮.১: সংযুক্ত কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত
পাঠ ৮.২: যৌগিক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত
পাঠ ৮.৩: ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের রূপান্তর (সূত্রের রূপান্তর)
পাঠ ৮.৪: গুণিতক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত
পাঠ ৮.৫: উপ-গুণিতক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত
পাঠ ৮.৬: ত্রিকোণমিতিক অভেদাবলী
পাঠ ৮.৭: ত্রিভুজের গুণাবলী: ত্রিভুজের সাইন সূত্র
পাঠ ৮.৮: ত্রিভুজের গুণাবলী: ত্রিভুজের কোসাইন সূত্র
পাঠ ৮.৯: ত্রিভুজের যেকোনো কোণের অনুপাতকে তার বাহুর মাধ্যমে প্রকাশ
পাঠ ৮.১০: ত্রিভুজের গুণাবলী: ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল
পাঠ ৮.১১: ত্রিভুজের গুণাবলী: ত্রিভুজের অন্যান্য সূত্র
পাঠ ৮.১২: ত্রিভুজের গুণাবলী: বিবিধ সমস্যা ও সমাধান
পাঠ ৮.১৩: ব্যবহারিক

পাঠ ৮.১ সংযুক্ত কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

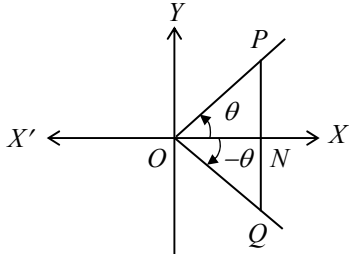
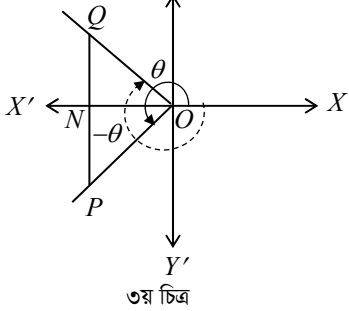
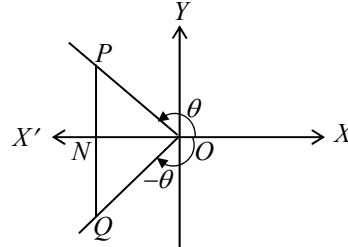
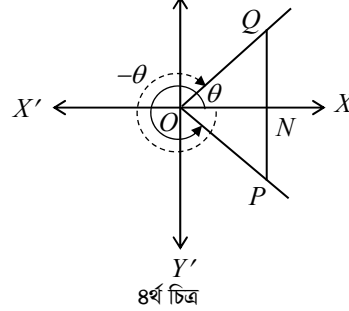
- সংযুক্ত কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নির্ণয় করতে পারবেন,
- সংযুক্ত কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত সম্পর্কিত সমস্যার সমাধান করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	সংযুক্ত কোণ, ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

মূলপাঠ

সংযুক্ত কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

$-\theta,\ 90^{o}\pm\theta,\ 180^{o}\pm\theta$........ এরূপ কোণকে θ কোণের সংযুক্ত কোণ বলা হয়। সংযুক্ত কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নির্ণয়ের সময় স্থানাংকের যথাযথ চিহ্নগুলো অবশ্যই বিবেচনা করতে হবে এবং মনে রাখতে হবে যে ব্যাসার্ধ ভেক্টর সব সময়ই ধনাত্মক। এরূপ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতকে θ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মাধ্যমে প্রকাশ করা হয়।

$(-\theta)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

১ম চিত্র

২য় চিত্র

৩য় চিত্র

৪র্থ চিত্র

মনে করুন, একটি ঘূর্ণায়মান রশ্মি OX অবস্থান থেকে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে ঘুরে $\angle XOP=\theta$ উৎপন্ন করে। অপর একটি ঘূর্ণায়মান রশ্মি একই আদি অবস্থান OX হতে ঘড়ির কাঁটার দিকে ঘুরে $\angle XOQ=-\theta$ কোণ উৎপন্ন করে। এখন P বিন্দু থেকে OX (১ম ও ৪র্থ চিত্র) অথবা OX' রেখার (২য় ও ৩য় চিত্র) উপর PN লম্ব অঙ্কন করুন। PN কে বর্ধিত করা হলে তা OQ রেখাকে Q বিন্দুতে ছেদ করবে।

এখন সমকোণী ত্রিভুজ OPN এবং OQN হতে পাওয়া যায়, $\angle PON=\angle QON,\ \angle ONP=\angle ONQ$ এবং ON সাধারণ বাহু। অতএব, ΔOPN এবং ΔOQN সর্বসম। সুতরাং তাদের অনুরূপ বাহুগুলোও সমান হবে। অতএব প্রচলিত রীতি অনুযায়ী বাহুগুলোর চিহ্ন বিবেচনা করে পাওয়া যায়, $PN=-QN$ এবং $OP=OQ$ (বাসার্ধ ভেক্টর)।

সুতরাং, $\sin(-\theta)=\dfrac{QN}{OQ}=\dfrac{-PN}{OP}=-\sin\theta$ $\qquad\cos(-\theta)=\dfrac{ON}{OQ}=\dfrac{ON}{OP}=\cos\theta$

$$\tan(-\theta)=\frac{QN}{ON}=\frac{-PN}{ON}=-\tan\theta \qquad \text{cosec}(-\theta)=\frac{OQ}{QN}=\frac{OP}{-PN}=-\text{cosec}\theta$$

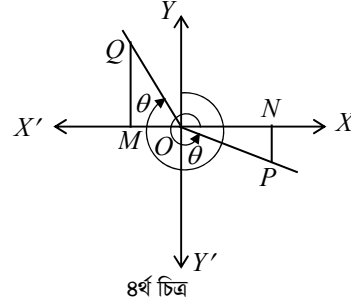
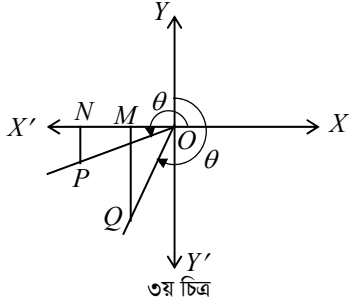
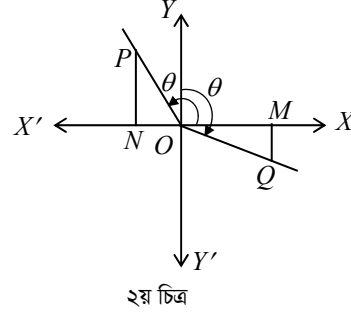
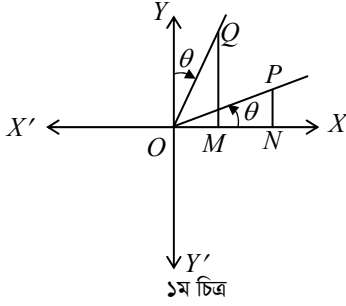
$$\sec(-\theta)=\frac{OQ}{ON}=\frac{OP}{ON}=\sec\theta \qquad \cot(-\theta)=\frac{ON}{QN}=\frac{ON}{-PN}=-\cot\theta$$

($90° - \theta$) কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

১ম চিত্র

২য় চিত্র

৩য় চিত্র

৪র্থ চিত্র

মনে করুন, একটি ঘূর্ণায়মান রশ্মি OX অবস্থান হতে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে ঘুরে $\angle XOP = \theta$ কোণ উৎপন্ন করে। অপর একটি ঘূর্ণায়মান রশ্মি একই আদি অবস্থান OX হতে একই দিকে ঘুরে $\angle XOY = 90°$ কোণ উৎপন্ন করে। দ্বিতীয় রশ্মিটি OY- অবস্থান থেকে ঘড়ির কাঁটার দিকে ঘুরে $\angle YOQ = \theta$ কোণ উৎপন্ন করে। তাহলে $\angle XOQ = 90° - \theta$.

এখন OP এবং OQ রেখা বরাবর এমন দুটি রেখা নিন যেন $OP = OQ$ হয়। P ও Q হতে OX রেখার উপর যথাক্রমে PN এবং QM লম্ব অঙ্কন করুন। এখন OP প্রথম অথবা তৃতীয় চতুর্ভাগে থাকলে OQ রেখাও যথাক্রমে প্রথম এবং তৃতীয় চতুর্ভাগে থাকবে (১ম ও ৩য় চিত্র)। আবার OP দ্বিতীয় অথবা চতুর্থ চতুর্ভাগে থাকলে OQ রেখা যথাক্রমে চতুর্থ অথবা দ্বিতীয় চতুর্ভাগে থাকবে (২য় ও ৪র্থ চিত্র)।

এখন ΔPON ও ΔQOM সমকোণী ত্রিভুজ হতে পাওয়া যায়, $\angle PON = \angle OQM$ এবং $OQ = OP$। অতএব, ত্রিভুজ দুটি সর্বসম এবং তাদের অনুরূপ বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য সমান। অতএব প্রচলিত রীতি অনুযায়ী বাহুগুলোর চিহ্ন বিবেচনা করে পাওয়া যায়, $QM = ON$, $OM = PN$, $OQ = OP$ (ব্যাসার্ধ ভেক্টর)।

অতএব, $\sin(90° - \theta) = \sin XOQ = \dfrac{QM}{OQ} = \dfrac{ON}{OP} = \cos XOP = \cos\theta$

$$\cos(90° - \theta) = \cos XOQ = \frac{OM}{OQ} = \frac{PN}{OP} = \sin XOP = \sin\theta$$

$$\tan(90° - \theta) = \tan XOQ = \frac{QM}{OM} = \frac{ON}{PN} = \cot XOP = \cot\theta$$

উপরোক্ত অনুপাতের ফলাফল হতে সহজে দেখানো যায় যে,

$$\text{cosec}(90° - \theta) = \sec\theta, \qquad \sec(90° - \theta) = \text{cosec}\theta, \qquad \cot(90° - \theta) = \tan\theta$$

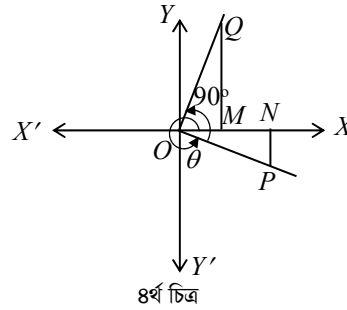
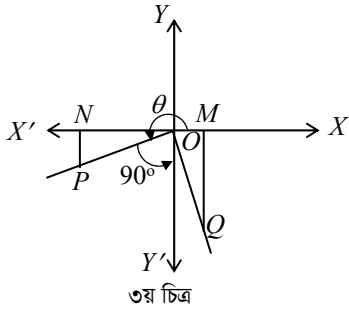
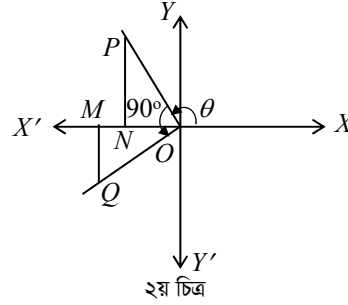
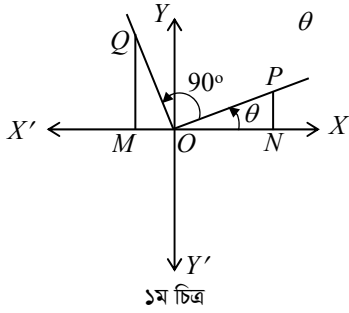
দ্রষ্টব্য ঃ $90° - \theta$ এবং θ পরস্পরের পরিপূরক কোণ। দুটি পরিপূরক কোণের জন্য একটি কোণের sine অপরটির cosine, একটির tangent অপরটির cotangent এবং একটির cosecant অপরটির secant এর সমান। যেমন, $30°$ ও $60°$ কোণ পরস্পরের পরিপূরক। অতএব $\sin 30° = \cos 60°$, $\tan 30° = \cot 60°$, $\text{cosec } 30° = \sec 60°$।

$(90° + \theta)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

১ম চিত্র

২য় চিত্র

৩য় চিত্র

৪র্থ চিত্র

মনে করুন, একটি ঘূর্ণায়মান রশ্মি আদি অবস্থান OX থেকে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে ঘুরে $\angle XOP = \theta$ কোণ উৎপন্ন করে। ঐ একই রশ্মি একই দিকে আরও ঘুরে $\angle POQ = 90°$ কোণ উৎপন্ন করে। তাহলে, $\angle XOQ = 90° + \theta$।
এখন OP এবং OQ রেখা দুটি থেকে $OP = OQ$ নিন এবং P ও Q হতে OX (অথবা OX') রেখার উপর যথাক্রমে PN এবং QM লম্ব অঙ্কন করুন।
এখন ΔOPN এবং ΔOQM সমকোণী ত্রিভুজ হতে পাওয়া যায়, $\angle PON = \angle QOY = \angle OQM$ এবং $OP = OQ$। অতএব, ত্রিভুজ দুটি সর্বসম এবং তাদের অনুরূপ বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য সমান। অতএব প্রচলিত রীতি অনুযায়ী বাহুগুলোর চিহ্ন বিবেচনা করে পাওয়া যায়, $QM = ON, -OM = PN, OP = OQ$ (ব্যাসার্ধ ভেক্টর)।

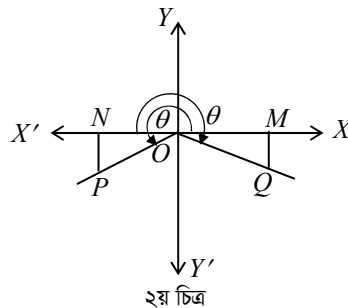
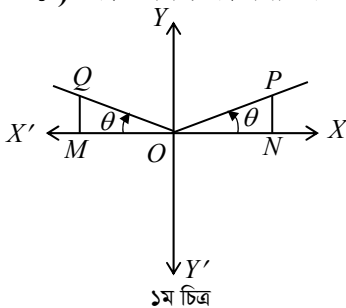
অতএব, $\sin(90° + \theta) = \sin XOQ = \dfrac{QM}{OQ} = \dfrac{ON}{OP} = \cos XOP = \cos\theta$

$$\cos(90° + \theta) = \cos XOQ = \frac{OM}{OQ} = -\frac{PN}{OP} = -\sin XOP = -\sin\theta$$

$$\tan(90° + \theta) = \tan XOQ = \frac{QM}{OM} = \frac{ON}{-PN} = -\cot XOP = -\cot\theta$$

উপরোক্ত অনুপাতের ফলাফল হতে সহজে দেখানো যায় যে,

$$\operatorname{cosec}(90° + \theta) = \sec\theta, \qquad \sec(90° + \theta) = -\operatorname{cosec}\theta, \qquad \cot(90° + \theta) = -\tan\theta$$

$(180° - \theta)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

১ম চিত্র

২য় চিত্র

মনে করুন, একটি ঘূর্ণায়মান রশ্মি OX অবস্থান থেকে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে ঘুরে $\angle XOP = \theta$ কোণ উৎপন্ন করে। অপর একটি ঘূর্ণায়মান রশ্মি একই আদি অবস্থান OX থেকে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে ঘুরে OX' অবস্থানে এসে $XOX' = 180°$ কোণ উৎপন্ন করে পুনরায় ঘড়ির কাঁটার দিকে ঘুরে $X'OQ = \theta$ কোণ উৎপন্ন করে। তাহলে, $\angle XOQ = 180°-\theta$। এখন $OP = OQ$ নিন এবং P ও Q বিন্দু হতে OX (অথবা OX') রেখার উপর যথাক্রমে PN এবং QM লম্ব অঙ্কন করুন।

এখন $\angle PON = \angle QOM$ এবং $OP = OQ$। সুতরাং, ΔPON এবং ΔQOM সর্বসম। অতএব তাদের অনুরূপ বাহুগুলো পরস্পর সমান হবে।

প্রচলিত রীতি অনুযায়ী বাহুগুলোর চিহ্ন বিবেচনা করে পাওয়া যায়, $QM = PN, -OM = ON, OP = OQ$

অতএব, $\sin(180° - \theta) = \sin XOQ = \dfrac{QM}{OQ} = \dfrac{PN}{OP} = \sin XOP = \sin\theta$

$$\cos(180° - \theta) = \cos XOQ = \frac{OM}{OQ} = \frac{-ON}{OP} = -\cos XOP = -\cos\theta$$

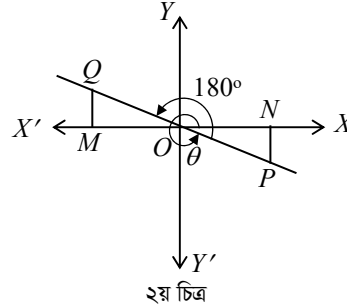
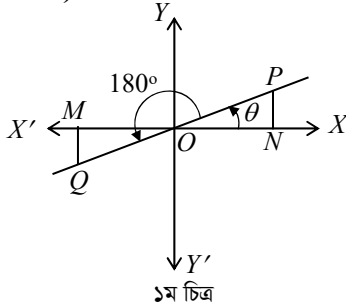
$$\tan(180° - \theta) = \tan XOQ = \frac{QM}{OM} = \frac{PN}{-ON} = -\tan XOP = -\tan\theta$$

উপরোক্ত অনুপাতের ফলাফল হতে সহজে দেখানো যায় যে,

$$\operatorname{cosec}(180° - \theta) = \operatorname{cosec}\theta, \qquad \sec(180° - \theta) = -\sec\theta, \qquad \cot(180° - \theta) = -\cot\theta$$

($180° + \theta$) কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

১ম চিত্র

২য় চিত্র

মনে করুন, একটি ঘূর্ণায়মান রশ্মি OX অবস্থান থেকে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে ঘুরে $\angle XOP = \theta$ কোণ উৎপন্ন করে। আবার রশ্মিটি ঐ একই দিকে ঘুরে $\angle POQ = 180°$ কোণ উৎপন্ন করে। তাহলে, $\angle XOQ = 180°+\theta$ এবং OP ও OQ একই সরলরেখায় অবস্থিত।

এখন $OP = OQ$ নিন এবং P ও Q বিন্দু হতে $X'OX$ রেখার উপর যথাক্রমে PN এবং QM লম্ব অঙ্কন করুন। যেহেতু $\angle PON = \angle QOM$ এবং $OP = OQ$, অতএব ΔPON ও ΔQOM সর্বসম। সুতরাং তাদের অনুরূপ বাহুগুলোও পরস্পর সমান হবে।

প্রচলিত রীতি অনুযায়ী বাহুগুলোর চিহ্ন বিবেচনা করে পাওয়া যায়, $-QM = PN,\ -OM = ON,\ OQ = OP$

অতএব, $\sin(180° + \theta) = \sin XOQ = \dfrac{QM}{OQ} = -\dfrac{PN}{OP} = -\sin XOP = -\sin\theta$

$$\cos(180° + \theta) = \cos XOQ = \frac{OM}{OQ} = \frac{-ON}{OP} = -\cos XOP = -\cos\theta$$

$$\tan(180° + \theta) = \tan XOQ = \frac{QM}{OM} = \frac{-PN}{-ON} = \frac{PN}{ON} = \tan XOP = \tan\theta$$

উপরোক্ত অনুপাতের ফলাফল হতে সহজে দেখানো যায় যে,

$$\operatorname{cosec}(180° + \theta) = -\operatorname{cosec}\theta, \qquad \sec(180° + \theta) = -\sec\theta, \qquad \cot(180° + \theta) = \cot\theta$$

$(270^\circ - \theta)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

পূর্বের নিয়ম অনুসরণ করে জ্যামিতিক পদ্ধতিতে $(270^\circ - \theta)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নির্ণয় করা যায়। কিন্তু নিম্নের পদ্ধতি অনুসরণ করে আমরা সহজে $(270^\circ - \theta)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নির্ণয় করতে পারি।

$$\sin(270^\circ - \theta) = \sin\{180^\circ + (90^\circ - \theta)\} = -\sin(90^\circ - \theta) = -\cos\theta$$
$$\cos(270^\circ - \theta) = \cos\{180^\circ + (90^\circ - \theta)\} = -\cos(90^\circ - \theta) = -\sin\theta$$
$$\tan(270^\circ - \theta) = \tan\{180^\circ + (90^\circ - \theta)\} = \tan(90^\circ - \theta) = \cot\theta$$

অনুরূপভাবে, $\operatorname{cosec}(270^\circ - \theta) = -\sec\theta$, $\sec(270^\circ - \theta) = -\operatorname{cosec}\theta$, $\cot(270^\circ - \theta) = \tan\theta$

$(270^\circ + \theta)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

জ্যামিতিক পদ্ধতিতেও $(270^\circ + \theta)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নির্ণয় করা যায়। কিন্তু নিম্নলিখিত উপায়ে $(270^\circ + \theta)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত সহজে নির্ণয় করা যায়।

$$\sin(270^\circ + \theta) = \sin\{180^\circ + (90^\circ + \theta)\} = -\sin(90^\circ + \theta) = -\cos\theta$$
$$\cos(270^\circ + \theta) = \cos\{180^\circ + (90^\circ + \theta)\} = -\cos(90^\circ + \theta) = -(-\sin\theta) = \sin\theta$$
$$\tan(270^\circ + \theta) = \tan\{180^\circ + (90^\circ + \theta)\} = \tan(90^\circ + \theta) = -\cot\theta$$

অনুরূপভাবে, $\operatorname{cosec}(270^\circ + \theta) = -\sec\theta$, $\sec(270^\circ + \theta) = \operatorname{cosec}\theta$, $\cot(270^\circ + \theta) = -\tan\theta$

$(360^\circ - \theta)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

জ্যামিতিক পদ্ধতিতেও $(360^\circ - \theta)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নির্ণয় করা যায়। কিন্তু নিম্নলিখিত উপায়ে $(360^\circ - \theta)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত সহজে নির্ণয় করা যায়।

$$\sin(360^\circ - \theta) = \sin\{270^\circ + (90^\circ - \theta)\} = -\cos(90^\circ - \theta) = -\sin\theta$$
$$\cos(360^\circ - \theta) = \cos\{270^\circ + (90^\circ - \theta)\} = \sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta$$
$$\tan(360^\circ - \theta) = \tan\{270^\circ + (90^\circ - \theta)\} = -\cot(90^\circ - \theta) = -\tan\theta$$

অনুরূপভাবে, $\operatorname{cosec}(360^\circ - \theta) = -\operatorname{cosec}\theta$, $\sec(360^\circ - \theta) = \sec\theta$, $\cot(360^\circ - \theta) = -\cot\theta$

$(360^\circ + \theta)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

জ্যামিতিক পদ্ধতিতেও $(360^\circ + \theta)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নির্ণয় করা যায়। কিন্তু নিম্নলিখিত উপায়ে $(360^\circ + \theta)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত সহজে নির্ণয় করা যায়।

$$\sin(360^\circ + \theta) = \sin\{270^\circ + (90^\circ + \theta)\} = -\cos(90^\circ + \theta) = -(-\sin\theta) = \sin\theta$$
$$\cos(360^\circ + \theta) = \cos\{270^\circ + (90^\circ + \theta)\} = \sin(90^\circ + \theta) = \cos\theta$$
$$\tan(360^\circ + \theta) = \tan\{270^\circ + (90^\circ + \theta)\} = -\cot(90^\circ + \theta) = -(-\tan\theta) = \tan\theta$$

অনুরূপভাবে, $\operatorname{cosec}(360^\circ + \theta) = \operatorname{cosec}\theta$, $\sec(360^\circ + \theta) = \sec\theta$, $\cot(360^\circ + \theta) = \cot\theta$

সংযুক্ত কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নির্ণয়ের নিয়ম

ধাপ ১: কোণ ঋণাত্মক হলে $(-\theta)$-এর নিয়ম প্রযোজ্য হবে।

ধাপ ২: প্রদত্ত কোণকে $(n.90^\circ \pm \theta)$ বা $\left(n.\frac{\pi}{2} \pm \theta\right)$ আকারে প্রকাশ করতে হবে, যেখানে θ সূক্ষ্মকোণ এবং $n \in N$.

ধাপ ৩: (ক) n জোড় হলে মূল অনুপাতের কোনরূপ পরিবর্তন হয় না অর্থাৎ sine, cosine, tangent ইত্যাদি sine, cosine, tangent-ই থাকে। কিন্তু তার চিহ্ন ধনাত্মক হবে না ঋণাত্মক হবে তা নির্ণয় করার জন্য θ কোণকে ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ ধরে মূল কোণটি কোন্ চৌকোণে অবস্থান করে তা নির্ণয় করে চিহ্নের চৌকণ-নিয়ম অনুযায়ী সহজেই নির্ণয় করা যায়।

যেমন $\sin(540^\circ + \theta) = \sin(6 \times 90^\circ + \theta)$

এখানে θ কোণ 90°-এর জোড় গুণিতকের সাথে যোগ, অতএব θ কোণের sine-এর অনুপাতে পরিবর্তিত না হয়ে sine-ই থাকবে। আবার কোণ উৎপন্নকারী ঘূর্ণায়মান রশ্মিটি আদি অবস্থান হতে ঘূর্ণন শুরু করে $(540^\circ + \theta)$

কোণ উৎপন্ন করে তৃতীয় চৌকোণে অবস্থান করে এবং ঐ চৌকোণে tangent ও cotangent ছাড়া অপর অনুপাতগুলির মান ঋণাত্মক। সুতরাং $\sin(540°+\theta) = \sin(6\times 90°+\theta) = -\sin\theta$

ধাপ ৩: (খ) n বিজোড় হলে মূল অনুপাত পরিবর্তিত হয়ে সহ অনুপাতে পরিণত হয়। অর্থাৎ sine পরিবর্তিত হয়ে cosine, cosine পরিবর্তিত হয়ে sine, tangent পরিবর্তিত হয়ে cotangent, cotangent পরিবর্তিত হয়ে tangent, cosecant পরিবর্তিত হয়ে secant এবং secant পরিবর্তিত হয়ে cosecant হয়। কিন্তু তার চিহ্ন ধনাত্মক হবে না ঋণাত্মক হবে তা নির্ণয় করার জন্য θ কোণকে ধনাত্মক সুক্ষ্মকোণ ধরে মূল কোণটি কোন্ চৌকোণে অবস্থান করে তা নির্ণয় করে চিহ্নের চৌকণ-নিয়ম অনুযায়ী সহজেই নির্ণয় করা যায়।

যেমন $\sin(450°+\theta) = \sin(5\times 90°+\theta)$

এখানে θ কোণ 90°-এর বিজোড় গুণিতকের সাথে যোগ, অতএব θ কোণের sine-এর অনুপাতে পরিবর্তিত হয়ে সহ অনুপাত cosine-এ পরিণত হবে। আবার কোণ উৎপন্নকারী ঘূর্ণায়মান রশ্মিটি আদি অবস্থান হতে ঘূর্ণন শুরু করে $(450°+\theta)$ কোণ উৎপন্ন করে দ্বিতীয় চৌকোণে অবস্থান করে এবং ঐ চৌকোণে sine অনুপাতের মান ধনাত্মক। সুতরাং $\sin(450°+\theta) = \sin(5\times 90°+\theta) = \cos\theta$

উদাহরণ 1: মান নির্ণয় করুন (i) $\sin 690°$ (ii) $\tan 1290°$ (iii) $\sec(-2565°)$

সমাধান: (i) $\sin 690° = \sin(7\times 90° + 60°) = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$

(ii) $\tan 1290° = \tan(14\times 90° + 30°) = -\tan 30° = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

(iii) $\sec(-2565°) = \sec(2565°) = \sec(28\times 90° + 45°) = \sec 45° = \sqrt{2}$

উদাহরণ 2: মান নির্ণয় করুন $\tan\frac{\pi}{12}\tan 5\frac{\pi}{12}\tan 7\frac{\pi}{12}\tan 11\frac{\pi}{12}$

সমাধান: $\tan\frac{\pi}{12}\tan 5\frac{\pi}{12}\tan 7\frac{\pi}{12}\tan 11\frac{\pi}{12} = \tan\frac{180^o}{12}\tan 5\frac{180^o}{12}\tan 7\frac{180^o}{12}\tan 11\frac{180^o}{12}$

$= \tan 15^o \tan 75^o \tan 105^o \tan 165^o = \tan 15^o \tan(90^o - 15^o)\tan(90^o + 15^o)\tan(180^o - 15^o)$

$= \tan 15^o \cot 15^o(-\cot 15^o)(-\tan 15^o) = 1$

উদাহরণ 3: মান নির্ণয় করুন $\sin^2\frac{17\pi}{18} + \sin^2\frac{5\pi}{8} + \cos^2\frac{37\pi}{18} + \cos^2\frac{3\pi}{8}$

সমাধান: $\sin^2\frac{17\pi}{18} + \sin^2\frac{5\pi}{8} + \cos^2\frac{37\pi}{18} + \cos^2\frac{3\pi}{8}$

$$= \left\{\sin\left(\pi - \frac{\pi}{18}\right)\right\}^2 + \left\{\sin\left(\pi - \frac{3\pi}{8}\right)\right\}^2 + \left\{\cos\left(2\pi + \frac{\pi}{18}\right)\right\}^2 + \cos^2\frac{3\pi}{8}$$

$$= \sin^2\frac{\pi}{18} + \sin^2\frac{3\pi}{8} + \cos^2\frac{\pi}{18} + \cos^2\frac{3\pi}{8} = \left(\sin^2\frac{\pi}{18} + \cos^2\frac{\pi}{18}\right) + \left(\sin^2\frac{3\pi}{8} + \cos^2\frac{3\pi}{8}\right) = 1 + 1 = 2$$

উদাহরণ 4: যদি n এর মান শূন্য কিংবা যেকোনো অখন্ড সংখ্যা হয় তবে $\tan\left\{\frac{n\pi}{2} + (-1)^n\frac{\pi}{4}\right\}$ এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান: যখন $n = 0,\ \tan\left\{\frac{n\pi}{2} + (-1)^n\frac{\pi}{4}\right\} = \tan\frac{\pi}{4} = 1$

যদি n জোড় সংখ্যা এবং m একটি অখন্ড সংখ্যা হয় তবে $n = 2m$

$$\therefore \tan\left\{\frac{n\pi}{2} + (-1)^n\frac{\pi}{4}\right\} = \tan\left(\frac{2m\pi}{2} + (-1)^{2m}\frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(m\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \tan\frac{\pi}{4} = 1$$

আবার যখন n একটি বিজোড় সংখ্যা এবং m যেকোনো অখন্ড সংখ্যা তখন $n = 2m+1$ ধরে,

$$\tan\left\{\frac{n\pi}{2}+(-1)^n\frac{\pi}{4}\right\} = \tan\left\{\frac{(2m+1)\pi}{2}+(-1)^{2m+1}\frac{\pi}{4}\right\} = \tan\left(m\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \tan\left\{m\pi+\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right\} = \tan\left(m\pi+\frac{\pi}{4}\right) = \tan\frac{\pi}{4} = 1$$

সুতরাং n এর মান শূন্য কিংবা যেকোন অখন্ড সংখ্যা হলে আমরা পাই-

$$\tan\left\{\frac{n\pi}{2}+(-1)^n\frac{\pi}{4}\right\} = \tan\frac{\pi}{4} = 1$$

শিক্ষার্থীর কাজ	1. মান নির্ণয় করুন $\sin^2\frac{\pi}{7}+\sin^2\frac{5\pi}{14}+\sin^2\frac{8\pi}{7}+\sin^2\frac{9\pi}{14}$ 2. যদি n এর মান যেকোনো পূর্ণ সংখ্যা হয় তবে $\sin\left\{n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{4}\right\}$ এর মান নির্ণয় করুন।

উদাহরণ 5: সমাধান করুন $2(\sin\theta\cos\theta+\sqrt{3}) = \sqrt{3}\cos\theta+4\sin\theta$, যখন $0^\circ < \theta < 360^\circ$

সমাধান: $2(\sin\theta\cos\theta+\sqrt{3}) = \sqrt{3}\cos\theta+4\sin\theta \Rightarrow 2\sin\theta\cos\theta+2\sqrt{3}-\sqrt{3}\cos\theta-4\sin\theta = 0$

$\Rightarrow 2\sin\theta\cos\theta-4\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta+2\sqrt{3} = 0 \Rightarrow 2\sin\theta(\cos\theta-2)-\sqrt{3}(\cos\theta-2) = 0$

$\Rightarrow (\cos\theta-2)(2\sin\theta-\sqrt{3}) = 0$

হয় $\cos\theta-2 = 0$

$\Rightarrow \cos\theta = 2$, যা সম্ভব নয়

নাহয় $2\sin\theta-\sqrt{3} = 0$

$\Rightarrow 2\sin\theta = \sqrt{3} \Rightarrow \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 60^\circ$ বা, $\sin 120^\circ$

$\therefore \theta = 60^\circ, 120^\circ$

সুতরাং $\theta = 60^\circ, 120^\circ$

উদাহরণ 6: সমাধান করুন $\tan\theta-\sqrt{3}\cos\theta-\sin\theta+\sqrt{3} = 0$, যখন $0 \le \theta \le 2\pi$

সমাধান: $\tan\theta-\sqrt{3}\cos\theta-\sin\theta+\sqrt{3} = 0$

$\Rightarrow \tan\theta-\sqrt{3}\cos\theta-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}.\cos\theta+\sqrt{3} = 0 \Rightarrow \tan\theta-\sqrt{3}\cos\theta-\tan\theta\cos\theta+\sqrt{3} = 0$

$\Rightarrow \tan\theta+\sqrt{3}-\tan\theta\cos\theta-\sqrt{3}\cos\theta = 0 \Rightarrow 1(\tan\theta+\sqrt{3})-\cos\theta(\tan\theta+\sqrt{3}) = 0$

$\Rightarrow (\tan\theta+\sqrt{3})(1-\cos\theta) = 0$

হয় $\tan\theta+\sqrt{3} = 0$

$\Rightarrow \tan\theta = -\sqrt{3} = -\tan\frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow \tan\theta = \tan\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)$ বা, $\tan\left(2\pi-\frac{\pi}{3}\right)$

$\therefore \theta = \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$

নাহয় $1-\cos\theta = 0$

$\Rightarrow \cos\theta = 1 = \cos 0^\circ$ বা, $\cos 2\pi$

$\therefore \theta = 0^\circ, 2\pi$

সুতরাং $\therefore \theta = 0^\circ, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, 2\pi$

সারসংক্ষেপ

- $\sin(-\theta) = -\sin\theta$, $\cos(-\theta) = \cos\theta$, $\tan(-\theta) = -\tan\theta$, $\mathrm{cosec}(-\theta) = -\mathrm{cosec}\,\theta$, $\sec(-\theta) = \sec\theta$, $\cot(-\theta) - \cot\theta$
- $\sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta$, $\cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta$, $\tan(90^\circ - \theta) = \cot\theta$, $\mathrm{cosec}(90^\circ - \theta) = \sec\theta$, $\sec(90^\circ - \theta) = \mathrm{cosec}\,\theta$, $\cot(90^\circ - \theta) = \tan\theta$
- $\sin(90^\circ + \theta) = \cos\theta$, $\cos(90^\circ + \theta) = -\sin\theta$, $\tan(90^\circ + \theta) = -\cot\theta$, $\mathrm{cosec}(90^\circ + \theta) = \sec\theta$, $\sec(90^\circ + \theta) = -\mathrm{cosec}\,\theta$, $\cot(90^\circ + \theta) = -\tan\theta$
- $\sin(180^\circ - \theta) = \sin\theta$, $\cos(180^\circ - \theta) = -\cos\theta$, $\tan(180^\circ - \theta) = -\tan\theta$, $\mathrm{cosec}(180^\circ - \theta) = \mathrm{cosec}\,\theta$, $\sec(180^\circ - \theta) = -\sec\theta$, $\cot(180^\circ - \theta) = -\cot\theta$
- $\sin(180^\circ + \theta) = -\sin\theta$, $\cos(180^\circ + \theta) = -\cos\theta$, $\tan(180^\circ + \theta) = \tan\theta$, $\mathrm{cosec}(180^\circ + \theta) = -\mathrm{cosec}\,\theta$, $\sec(180^\circ + \theta) = -\sec\theta$, $\cot(180^\circ + \theta) = \cot\theta$
- $\sin(270^\circ - \theta) = -\cos\theta$, $\cos(270^\circ - \theta) = -\sin\theta$, $\tan(270^\circ - \theta) = \cot\theta$, $\mathrm{cosec}(270^\circ - \theta) = -\sec\theta$, $\sec(270^\circ - \theta) = -\mathrm{cosec}\,\theta$, $\cot(270^\circ - \theta) = \tan\theta$
- $\sin(270^\circ + \theta) = -\cos\theta$, $\cos(270^\circ + \theta) = \sin\theta$, $\tan(270^\circ + \theta) - \cot\theta$, $\mathrm{cosec}(270^\circ + \theta) = -\sec\theta$, $\sec(270^\circ + \theta) = \mathrm{cosec}\,\theta$, $\cot(270^\circ + \theta) = -\tan\theta$
- $\sin(360^\circ - \theta) = -\sin\theta$, $\cos(360^\circ - \theta) = \cos\theta$, $\tan(360^\circ - \theta) = -\tan\theta$, $\mathrm{cosec}(360^\circ - \theta) = -\mathrm{cosec}\,\theta$, $\sec(360^\circ - \theta) = \sec\theta$, $\cot(360^\circ - \theta) = -\cot\theta$
- $\sin(360^\circ + \theta) = \sin\theta$, $\cos(360^\circ + \theta) = \cos\theta$, $\tan(360^\circ + \theta) = \tan\theta$, $\mathrm{cosec}(360^\circ + \theta) = \mathrm{cosec}\,\theta$, $\sec(360^\circ + \theta) = \sec\theta$, $\cot(360^\circ + \theta) = \cot\theta$

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৮.১

1. মান নির্ণয় করুন

   (i) $\sin 2370^\circ$ (ii) $\sec 570^\circ$ (iii) $\mathrm{cosec}\ 765^\circ$ (iv) $\cot(-1530^\circ)$
   (v) $\sin(-1395^\circ)$ (vi) $\tan(-1125^\circ)$ (vii) $\cot 3750^\circ$

2. মান নির্ণয় করুন

   (i) $\cos\frac{49\pi}{6}$ (ii) $\sin\left(-\frac{11\pi}{4}\right)$ (iii) $\tan\left(\frac{5\pi}{2} - \frac{19\pi}{3}\right)$ (iv) $\sec\left(-\frac{13\pi}{6}\right)$
   (v) $\cos\left(\frac{5\pi}{2} - \frac{19\pi}{3}\right)$ (vi) $\mathrm{cosec}\frac{16\pi}{3}$

3. মান নির্ণয় করুন

   (i) $\sin 420^\circ \cos 390^\circ + \cos(-300^\circ)\sin(-330^\circ)$, (ii) $\cos 420^\circ \sin(-300^\circ) - \sin 870^\circ \cos 570^\circ$
   (iii) $\tan\frac{17\pi}{4}\cos\left(-\frac{11\pi}{4}\right) + \sec\left(-\frac{34\pi}{3}\right)\mathrm{cosec}\left(\frac{25\pi}{6}\right)$
   (iv) $\tan(-315^\circ)\cot 405^\circ + \sec(-765^\circ)\mathrm{cosec}\,495^\circ$

4. প্রমাণ করুন

   (i) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)\cot\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right)\cos(\pi - \theta) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right)\cot\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$

(ii) $\sin\left(\frac{5\pi}{2}+\theta\right)\cos(3\pi-\theta)\cot\left(\frac{7\pi}{2}+\theta\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)\cot\left(\frac{5\pi}{2}+\theta\right)$

(iii) $\tan\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)\cot(3\pi+\theta)=\text{cosec}(5\pi-\theta)\sec\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)\cos 5\pi$

5. মান নির্ণয় করুন

(i) $\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\cos^2\frac{5\pi}{8}+\cos^2\frac{7\pi}{8}$

(ii) $\cos^2\frac{\pi}{24}+\cos^2\frac{19\pi}{24}+\cos^2\frac{31\pi}{24}+\cos^2\frac{37\pi}{24}$

(iii) $\sin^2\frac{\pi}{12}+\sin^2\frac{3\pi}{12}+\sin^2\frac{5\pi}{12}+\sin^2\frac{7\pi}{12}+\sin^2\frac{9\pi}{12}+\sin^2\frac{11\pi}{12}$

(iv) $\sec^2\frac{14\pi}{17}-\sec^2\frac{39\pi}{17}+\cot^2\frac{41\pi}{34}-\cot^2\frac{23\pi}{34}$

6. (i) যদি n একটি অখন্ড সংখ্যা হয়, তবে $\sin\left\{n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}\right\}$ এর মান নির্ণয় করুন।

(ii) যদি n একটি পূর্ণ সংখ্যা হয়, তবে দেখান যে, $\sin(n\pi+\alpha)=(-1)^n\sin\alpha$ ।

(iii) যদি n একটি পূর্ণ সংখ্যা হয়, তবে দেখান যে, $\cos\left(2n\pi\pm\frac{\pi}{4}\right)$ এর মান সব সময় $\frac{1}{\sqrt{2}}$ হয়।

7. নিচের সমীকরণগুলো হতে θ এর মান নির্ণয় করুন।

(i) $\tan\theta=-\sqrt{3}$, যখন $270^\circ<\theta<360^\circ$, (ii) $\sec\theta=-2$, যখন $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$

8. সমাধান করুন যখন $0^\circ<\theta<360^\circ$

(i) $\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta=2$

(ii) $3\tan^2\theta-4\sqrt{3}\sec\theta+7=0$

(iii) $3(\sec^2\theta+\tan^2\theta)=5$

(iv) $2\sin^2\theta-5\cos\theta+1=0$

(v) $1-2\sin\theta-2\cos\theta+\cot\theta=0$

9. θ এর মান 180° এবং 270° এর মধ্যবর্তী এবং $\cos ec\theta=-\frac{7}{3}$ হলে, $\cot\theta$ এর মান নির্ণয় করুন।

10. (i) $\theta=\frac{\pi}{20}$ হলে দেখান যে, $\cot\theta\cot 3\theta\cot 5\theta\cot 7\theta\ldots\ldots\cot 19\theta=-1$

(ii) $\theta=\frac{\pi}{28}$ হলে দেখান যে, $\tan\theta\tan 3\theta\tan 5\theta\ldots\ldots\tan 13\theta=1$

11. প্রমাণ করুন, $\tan\frac{\pi}{28}\tan\frac{3\pi}{28}\tan\frac{5\pi}{28}\ldots\ldots\tan\frac{13\pi}{28}=1$

পাঠ ৮.২ যৌগিক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- যৌগিক কোণের সংজ্ঞা বলতে পারবেন,

- cos $(A+B)$, cos$(A–B)$, sin$(A+B)$, sin$(A–B)$, tan$(A+B)$, tan$(A–B)$ ইত্যাদি সুত্র নির্ণয় ও প্রমাণ করতে পারবেন,
- সুত্রগুলির প্রয়োগ করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	যৌগিক কোণ, ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

মূলপাঠ

যৌগিক কোণ (Compound angle)

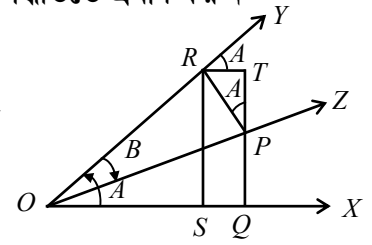
দুই বা ততোধিক কোণের বীজগণিতীয় যোগফলকে যৌগিক কোণ বলে। যেমন- $A+B$, $A–B$, $A+B+C$, $A–B+C$, $A–B–C$ ইত্যাদি যৌগিক কোণ-এর উদাহরণ।

দুই বা ততোধিক কোণের বীজগণিতীয় যোগফলই যৌগিক কোণ।

সূত্রঃ A ও B কোণদ্বয় ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ এবং $(A+B) < 90^0$ হলে, জ্যামিতিক পদ্ধতিতে প্রমাণ করুন

(i) $\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$

(ii) $\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$

প্রমাণঃ মনে করুন, O বিন্দুর সাপেক্ষে একটি ঘূর্ণায়মান রশ্মি তার আদি অবস্থান OX হতে ঘড়ির কাঁটার বিপরীতক্রমে ঘুরে $\angle XOY = A$ কোণ উৎপন্ন করে এবং ঐ একই রশ্মি আরও অধিক ঘুরে একই দিকে অগ্রসর হয়ে $\angle YOZ = B$ করে। তাহলে $\angle XOZ = A + B.$

এখন ঘূর্ণায়মান রশ্মির শেষ অবস্থান, OZ এর উপর একটি বিন্দু P থেকে OX ও OY এর উপর যথাক্রমে PQ ও PR লম্বদ্বয় আঁকুন। আবার R থেকে OX ও PQ এর উপর যথাক্রমে RS ও RT লম্বদ্বয় আঁকুন। তাহলে $TR = QS, TQ = RS$ এবং

$\angle TPR = 90^\circ - \angle PRT \quad [\because \angle PTR = 90^\circ]$

$= \angle TRY \; [\because PR \perp OY]$

$=$ একান্তর $\angle ROX = A \quad [\because RT \perp PQ$ এবং $XQ \perp PQ]$

এখন POQ সমকোণী ত্রিভুজ হতে আমরা পাই

$$\sin(A+B)=\frac{PQ}{OP}=\frac{PT+TQ}{OP}=\frac{PT+RS}{OP}=\frac{PT}{OP}+\frac{RS}{OP}=\frac{PT}{PR}.\frac{PR}{OP}+\frac{RS}{OR}.\frac{OR}{OP}$$

$$\therefore \sin(A+B)=\cos A\sin B+\sin A\cos B=\sin A\cos B+\cos A\sin B$$

আবার, $\cos(A+B)=\frac{OQ}{OP}=\frac{OS-QS}{OP}=\frac{OS-TR}{OP}=\frac{OS}{OP}-\frac{TR}{OP}=\frac{OS}{OR}.\frac{OR}{OP}-\frac{TR}{PR}.\frac{PR}{OP}$

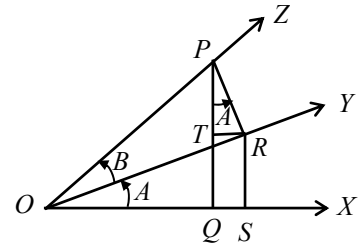
$$\therefore \cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$$

সূত্রঃ A ও B কোণদ্বয় ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ এবং $A>B$ হলে, জ্যামিতিক পদ্ধতিতে প্রামণ করুন

(i) $\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B$

(ii) $\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B$

প্রমাণঃ মনে করুন, O বিন্দুর সাপেক্ষে একটি ঘূর্ণায়মান রশ্মি তার আদি অবস্থান OX হতে ঘড়ির কাঁটার বিপরীতক্রমে ঘুরে $\angle XOY = A$ কোণ উৎপন্ন করে এবং পরে ঐ একই রশ্মি ঘড়ির কাঁটার দিকে ঘুরে $\angle YOZ = B$ করে। তাহলে $\angle XOZ = A - B.$

এখন কোণ উৎপন্নকারী ঘূর্ণায়মান রশ্মির শেষ অবস্থান, OZ এর উপর একটি বিন্দু P থেকে OX ও OY এর উপর যথাক্রমে PQ ও PR লম্বদ্বয় আঁকুন।

আবার R থেকে OX ও QP এর বর্ধিতাংশের উপর যথাক্রমে RS ও RT লম্বদ্বয় আঁকুন। তাহলে $SQ = RT,\ RS = TQ$ এবং

$\angle TPR = 90^\circ - \angle TRP \quad [\because \angle RTP = 90^\circ]$

$= \angle TRY \ [\because \angle PRY = 90^\circ]$

$=$ অনুরূপ $\angle YOX = A \quad [\because RT \perp TQ$ এবং $OQ \perp TQ]$

এখন POQ সমকোণী ত্রিভুজ হতে আমরা পাই,

$$\sin(A-B) = \frac{PQ}{OP} = \frac{TQ-TP}{OP} = \frac{RS-TP}{OP} = \frac{RS}{OP} - \frac{TP}{OP} = \frac{RS}{OR}.\frac{OR}{OP} - \frac{TP}{PR}.\frac{PR}{OP}$$

$\therefore \sin(A-B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B$

আবার, $\cos(A-B) = \dfrac{OQ}{OP} = \dfrac{OS+SQ}{OP} = \dfrac{OS+RT}{OP} = \dfrac{OS}{OP} + \dfrac{RT}{OP} = \dfrac{OS}{OR}.\dfrac{OR}{OP} + \dfrac{RT}{RP}.\dfrac{RP}{OP}$

$\therefore \cos(A-B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B$

A ও B যেকোনো কোণের জন্য,

(i) $\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$ **(ii)** $\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$

(iii) $\sin(A-B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B$ **(iv)** $\cos(A-B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B$

প্রমাণ: α ও β ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ এবং $\alpha + \beta < 90^\circ$ এর জন্য আমরা পাই,

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ ....(i)

মনে করুন, $A = 90^\circ + \alpha$ এবং $B = \beta$

এখন $\sin(A+B) = \sin\{(90^\circ+\alpha)+\beta\} = \sin\{90^\circ + (\alpha+\beta)\} = \cos(\alpha+\beta)$

$= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ [(i) নং হতে]

$= \cos(A-90^\circ)\cos B - \sin(A-90^\circ)\sin B$

$= \cos\{-(90^\circ - A)\}\cos B - \sin\{-(90^\circ - A)\}\sin B$

$= \cos(90^\circ - A)\cos B + \sin(90^\circ - A)\sin B \quad [\because \sin(-\theta) = -\sin\theta,\ \cos(-\theta) = \cos\theta]$

$= \sin A\cos B + \cos A\sin B$

$\therefore \sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$

অনুরূপভাবে, অপর সূত্রগুলো প্রমাণ করা যায়।

সূত্র: প্রমাণ করুন যে, (i) $\tan(A+B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A\tan B}$ (ii) $\tan(A-B) = \dfrac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A\tan B}$

(iii) $\cot(A+B) = \dfrac{\cot A\cot B - 1}{\cot B + \cot A}$ (iv) $\cot(A-B) = \dfrac{\cot A\cot B + 1}{\cot B - \cot A}$

প্রমাণ: (i) $\tan(A+B) = \dfrac{\sin(A+B)}{\cos(A+B)} = \dfrac{\sin A\cos B + \cos A\sin B}{\cos A\cos B - \sin A\sin B}$

এখন লব ও হরকে $\cos A\cos B$ দ্বারা ভাগ করে পাওয়া যায়

$$= \frac{\dfrac{\sin A\cos B}{\cos A\cos B} + \dfrac{\cos A\sin B}{\cos A\cos B}}{\dfrac{\cos A\cos B}{\cos A\cos B} - \dfrac{\sin A\sin B}{\cos A\cos B}} = \frac{\dfrac{\sin A}{\cos A} + \dfrac{\sin B}{\cos B}}{1 - \dfrac{\sin A}{\cos A}\dfrac{\sin B}{\cos B}} = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A\tan B} \quad \text{(প্রমাণিত)}$$

(ii) উপরের সমীকরণে B এর পরিবর্তে $-B$ বসিয়ে পাই-

$$\tan[A + (-B)] = \frac{\tan A + \tan(-B)}{1 - \tan A\tan(-B)} \Rightarrow \tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A\tan B}$$

(iii) $\cot(A+B)=\dfrac{\cos(A+B)}{\sin(A+B)}=\dfrac{\cos A\cos B-\sin A\sin B}{\sin A\cos B+\sin B\cos A}$

এখন লব ও হরকে $\sin A\sin B$ দ্বারা ভাগ করে পাওয়া যায়

$$=\dfrac{\dfrac{\cos A\cos B}{\sin A\sin B}-\dfrac{\sin A\sin B}{\sin A\sin B}}{\dfrac{\sin A\cos B}{\sin A\sin B}-\dfrac{\sin B\cos A}{\sin A\sin B}}=\dfrac{\dfrac{\cos A}{\sin A}\dfrac{\cos B}{\sin B}-1}{\dfrac{\cos B}{\sin B}+\dfrac{\cos A}{\sin A}}=\dfrac{\cot A\cot B-1}{\cot B+\cot A}$$ (প্রমাণিত)

(iv) অনুরূপভাবে, $\cot(A-B)=\dfrac{\cot A\cot B+1}{\cot B-\cot A}$ সূত্রটি প্রতিষ্ঠা করা যায়।

অনুসিদ্ধান্তঃ (i) $\sin(A+B)\sin(A-B)=\sin^2 A-\sin^2 B=\cos^2 B-\cos^2 A$

(ii) $\cos(A+B)\cos(A-B)=\cos^2 A-\sin^2 B=\cos^2 B-\sin^2 A$

প্রমাণঃ (i) $\sin(A+B)\sin(A-B)=(\sin A\cos B+\cos A\sin B)(\sin A\cos B-\cos A\sin B)$

$=\sin^2 A\cos^2 B-\cos^2 A\sin^2 B \quad =\sin^2 A(1-\sin^2 B)-(1-\sin^2 A)\sin^2 B$

$=\sin^2 A-\sin^2 A\sin^2 B-\sin^2 B+\sin^2 A\sin^2 B \quad =\sin^2 A-\sin^2 B$

$=(1-\cos^2 A)-(1-\cos^2 B)=\cos^2 B-\cos^2 A$

(ii) $\cos(A+B)\cos(A-B)=(\cos A\cos B-\sin A\sin B)(\cos A\cos B+\sin A\sin B)$

$=\cos^2 A\cos^2 B-\sin^2 A\sin^2 B \quad =\cos^2 A(1-\sin^2 B)-(1-\cos^2 A)\sin^2 B$

$=\cos^2 A-\cos^2 A\sin^2 B-\sin^2 B+\cos^2 A\sin^2 B \quad =\cos^2 A-\sin^2 B$

$=(1-\sin^2 A)-(1-\cos^2 B)=\cos^2 B-\sin^2 A$

উদাহরণ 1: মান নির্ণয় করুন $\sin 75^\circ, \cos 75^\circ, \tan 75^\circ$

সমাধানঃ $\sin 75^\circ=\sin(45^\circ+30^\circ)=\sin 45^\circ\cos 30^\circ+\cos 45^\circ\sin 30^\circ$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt2}\right)\left(\frac{\sqrt3}{2}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt3}{2\sqrt2}+\frac{1}{2\sqrt2}=\frac{\sqrt3+1}{2\sqrt2}$$

$\cos 75^\circ=\cos(45^\circ+30^\circ)=\cos 45^\circ\cos 30^\circ-\sin 45^\circ\sin 30^\circ$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt2}\right)\left(\frac{\sqrt3}{2}\right)-\left(\frac{1}{\sqrt2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt3}{2\sqrt2}-\frac{1}{2\sqrt2}=\frac{\sqrt3-1}{2\sqrt2}$$

$$\tan 75^\circ=\frac{\sin 75^\circ}{\cos 75^\circ}=\frac{\frac{\sqrt3+1}{2\sqrt2}}{\frac{\sqrt3-1}{2\sqrt2}}=\frac{\sqrt3+1}{\sqrt3-1}=\frac{(\sqrt3+1)^2}{(\sqrt3+1)(\sqrt3-1)}=\frac{3+1+2\sqrt3}{2}=\frac{4+2\sqrt3}{2}=2+\sqrt3$$

উদাহরণ 2: প্রমাণ করুন, $\cos 68^\circ 20'\cos 8^\circ 20'+\cos 81^\circ 40'\cos 21^\circ 40'=\dfrac{1}{2}$

সমাধানঃ $\cos 68^\circ 20'\cos 8^\circ 20'+\cos 81^\circ 40'\cos 21^\circ 40'$

$=\cos(90^\circ-21^\circ 40')\cos 8^\circ 20'+\cos(90^\circ-8^\circ 20')\cos 21^\circ 40'$

$=\sin 21^\circ 40'\cos 8^\circ 20'+\sin 8^\circ 20'\cos 21^\circ 40'=\sin(21^\circ 40'+8^\circ 20')=\sin 30^\circ=\dfrac{1}{2}$

উদাহরণ 3: প্রমাণ করুন $\tan 15^\circ+\tan 30^\circ+\tan 15^\circ\tan 30^\circ=1$

সমাধানঃ $\tan(30^\circ + 15^\circ) = \dfrac{\tan 30^\circ + \tan 15^\circ}{1 - \tan 30^\circ \tan 15^\circ}$

বা, $\tan 45^\circ = \dfrac{\tan 30^\circ + \tan 15^\circ}{1 - \tan 30^\circ \tan 15^\circ}$ বা, $1 = \dfrac{\tan 30^\circ + \tan 15^\circ}{1 - \tan 30^\circ \tan 15^\circ}$

বা, $1 - \tan 30^\circ \tan 15^\circ = \tan 15^\circ + \tan 30^\circ$

বা, $\tan 15^\circ + \tan 30^\circ + \tan 15^\circ \tan 30^\circ = 1$ (প্রমাণিত)

উদাহরণ 4: প্রমাণ করুন $\dfrac{\sin(B-C)}{\cos B \cos C} + \dfrac{\sin(C-A)}{\cos C \cos A} + \dfrac{\sin(A-B)}{\cos A \cos B} = 0$

সমাধানঃ $\dfrac{\sin(B-C)}{\cos B \cos C} + \dfrac{\sin(C-A)}{\cos C \cos A} + \dfrac{\sin(A-B)}{\cos A \cos B}$

$$= \frac{\sin B \cos C - \cos B \sin C}{\cos B \cos C} + \frac{\sin C \cos A - \cos C \sin A}{\cos C \cos A} + \frac{\sin A \cos B - \cos A \sin B}{\cos A \cos B}$$

$$= \frac{\sin B \cos C}{\cos B \cos C} - \frac{\cos B \sin C}{\cos B \cos C} + \frac{\sin C \cos A}{\cos C \cos A} - \frac{\cos C \sin A}{\cos C \cos A} + \frac{\sin A \cos B}{\cos A \cos B} - \frac{\cos A \sin B}{\cos A \cos B}$$

$$= \tan B - \tan C + \tan C - \tan A + \tan A - \tan B = 0$$

উদাহরণ 5: প্রমাণ করুন $\dfrac{\tan(3\theta - 2\phi) + \tan 2\phi}{1 - \tan(3\theta - 2\phi)\tan 2\phi} = \tan 3\theta$

সমাধানঃ $\dfrac{\tan(3\theta - 2\phi) + \tan 2\phi}{1 - \tan(3\theta - 2\phi)\tan 2\phi} = \tan[(3\theta - 2\phi) + \phi] = \tan(3\theta - 2\phi + 2\phi) = \tan 3\theta$ (প্রমাণিত)

শিক্ষার্থীর কাজ	
	1. মান নির্ণয় করুন $\sin 15^\circ, \cos 15^\circ, \tan 15^\circ$ 2. (i) প্রমাণ করুন $\tan 36^\circ + \tan 9^\circ + \tan 36^\circ \tan 9^\circ = 1$ (ii) $\tan 3A \tan 2A \tan A = \tan 3A - \tan 2A - \tan A$ 3. প্রমাণ করুনঃ (i) $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + A\right) = -\sin A$ (ii) $\sin(\pi - A) = \sin A$ 4. মান নির্ণয় করুন $\sin 28^\circ 32' \sin 88^\circ 32' + \sin 61^\circ 28' \sin 1^\circ 28'$ 5. প্রমাণ করুন $\sin(A + 45^\circ) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\sin A + \cos A)$

উদাহরণ 6: যদি $\theta + \phi = \alpha$ এবং $\tan\theta = k\tan\phi$ হয়, তবে দেখান যে, $\sin(\theta - \phi) = \dfrac{k-1}{k+1}\sin\alpha$

সমাধানঃ দেওয়া আছে, $\tan\theta = k\tan\phi \Rightarrow \dfrac{\tan\theta}{\tan\phi} = \dfrac{k}{1} \Rightarrow \dfrac{\tan\theta + \tan\phi}{\tan\theta - \tan\phi} = \dfrac{k+1}{k-1}$ [যোজন-বিয়োজন করে]

$$\Rightarrow \frac{\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} + \dfrac{\sin\phi}{\cos\phi}}{\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} - \dfrac{\sin\phi}{\cos\phi}} = \frac{k+1}{k-1} \Rightarrow \frac{\dfrac{\sin\theta\cos\phi + \sin\phi\cos\theta}{\cos\theta\cos\phi}}{\dfrac{\sin\theta\cos\phi - \sin\phi\cos\theta}{\cos\theta\cos\phi}} = \frac{k+1}{k-1} \Rightarrow \frac{\sin\theta\cos\phi + \sin\phi\cos\theta}{\sin\theta\cos\phi - \sin\phi\cos\theta} = \frac{k+1}{k-1}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin(\theta+\phi)}{\sin(\theta-\phi)} = \frac{k+1}{k-1} \Rightarrow \frac{\sin\alpha}{\sin(\theta-\phi)} = \frac{k+1}{k-1} [\because \theta + \phi = \alpha] \Rightarrow \sin(\theta - \phi) = \frac{k+1}{k-1}\sin\alpha$$

সারসংক্ষেপ

- দুই বা ততোধিক কোণের বীজগণিতীয় যোগফলকে যৌগিক কোণ বলে। যেমন- $A+B$, $A-B$, $A+B+C$, $A-B+C$, $A-B-C$ ইত্যাদি যৌগিক কোণ-এর উদাহরণ।
- A ও B কোণদ্বয় ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ এবং $(A+B) < 90^{\circ}$ হলে **(i)** $\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$ **(ii)** $\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$
- A ও B কোণদ্বয় ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ এবং $A>B$ হলে **(i)** $\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B$ **(ii)** $\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B$
- (i) $\tan(A+B)=\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$ (ii) $\tan(A-B)=\dfrac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}$
  (iii) $\cot(A+B)=\dfrac{\cot A\cot B-1}{\cot B+\cot A}$ (iv) $\cot(A-B)=\dfrac{\cot A\cot B+1}{\cot B-\cot A}$
- (i) $\sin(A+B)\sin(A-B)=\sin^2 A-\sin^2 B=\cos^2 B-\cos^2 A$
  (ii) $\cos(A+B)\cos(A-B)=\cos^2 A-\sin^2 B=\cos^2 B-\sin^2 A$

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৮.২

মান নির্ণয় করুন (1-2)

1. (i) $\sin 105^{\circ}$ (ii) $\cos 105^{\circ}$ (iii) $\tan 105^{\circ}$ (iv) $\sin 165^{\circ}$ (v) $\cos 165^{\circ}$
   (vi) $\tan 165^{\circ}$ (vii) $\sec 165^{\circ}$ (viii) $\operatorname{cosec} 165^{\circ}$ (ix) $\operatorname{cosec} 375^{\circ}$ (x) $\cot 165^{\circ}$
2. (i) $\cos 17^{\circ}40'\sin 77^{\circ}40'+\cos 107^{\circ}40'\sin 12^{\circ}20'$
   (ii) $\cos 68^{\circ}20'\cos 8^{\circ}20'+\cos 81^{\circ}40'\cos 21^{\circ}40'$
   (iii) $\sin 68^{\circ}32'\sin 88^{\circ}32'+\sin 61^{\circ}28'\sin 1^{\circ}28'$ (iv) $\dfrac{\tan 68^{\circ}35'-\cot 66^{\circ}25'}{1+\tan 68^{\circ}35'\cot 66^{\circ}25'}$
3. A ও B কোণদ্বয়ের প্রত্যেকটি ধনাত্মক ও সুক্ষ্মকোণ হয় এবং
   (i) যদি $\cos A=\dfrac{4}{5}$, $\cos B=\dfrac{3}{5}$ হয় হবে তবে $\sin(A+B)$ এবং $\cos(A+B)$ এর মান নির্ণয় করুন।
   (ii) যদি $\cot A=\dfrac{11}{2}$, $\tan B=\dfrac{7}{24}$ হয় হবে তবে $\cot(A-B)$ এবং $\tan(A+B)$ এর মান নির্ণয় করুন।
   (iii) যদি $\sec A=\dfrac{17}{8}$, $\operatorname{cosec} B=\dfrac{5}{4}$ হয় হবে তবে $\sec(A+B)$ এর মান নির্ণয় করুন।

প্রমাণ করুন (4-15)

4. $\sin(45^{\circ}+A)\cos(45^{\circ}-A)+\cos(45^{\circ}+A)\cos(135^{\circ}-A)=\sin 2A$
5. $\sin 2\theta\cos\theta+\cos 2\theta\sin\theta=\sin 4\theta\cos\theta-\cos 4\theta\sin\theta$
6. $\sin x\sin(x+30^{\circ})+\cos x\sin(x+120^{\circ})=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
7. $\sin A+\sin(120^{\circ}+A)+\sin(240^{\circ}+A)=0$
8. $\sin A\sin(B-C)+\sin B\sin(C-A)+\sin C\sin(A-B)=0$
9. $\sin(B+C)\sin(B-C)+\sin(C+A)\sin(C-A)+\sin(A+B)\sin(A-B)=0$
10. $\dfrac{\tan(3\theta-2\phi)+\tan 2\phi}{1-\tan(3\theta-2\phi)\tan 2\phi}=\tan 3\theta$

11. $\dfrac{\cot(\alpha+\beta)\cot\alpha+1}{\cot\alpha-\cot(\alpha+\beta)}=\cot\beta$ 12. $\operatorname{cosec}(x-y)=\dfrac{\sec x\sec y}{\tan x-\tan y}$

13. (i) $\dfrac{\cos 8^\circ+\sin 8^\circ}{\cos 8^\circ-\sin 8^\circ}=\tan 53^\circ$ (ii) $\dfrac{\cos 25^\circ-\sin 25^\circ}{\cos 25^\circ+\sin 25^\circ}=\tan 20^\circ$

14. (i) $\dfrac{\sin 75^\circ+\sin 15^\circ}{\sin 75^\circ-\sin 15^\circ}=\sqrt{3}$ (ii) $\dfrac{\sin 75^\circ-\sin 15^\circ}{\sin 75^\circ+\sin 15^\circ}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ (iii) $\dfrac{\cos 15^\circ+\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ-\sin 15^\circ}=\sqrt{3}$

15. (i) $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+A\right).\tan\left(\dfrac{3\pi}{4}+A\right)=-1$ (ii) $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\theta\right)=\dfrac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta-\sin\theta}$

16. যদি $A+B=\dfrac{\pi}{4}$ হয় তবে দেখান যে $(1+\tan A)(1+\tan B)=2$

17. যদি $\tan\alpha+\tan\beta=b, \cot\alpha+\cot\beta=a$ এবং $\alpha+\beta=\theta$ তবে দেখান যে, $(a-b)\tan\theta=ab$

পাঠ ৮.৩ ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের রূপান্তর (সূত্রের রূপান্তর)

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- দুইটি ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের গুণফলকে অপর দুইটি ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের যোগ ও বিয়োগফলে রূপান্তর করতে পারবেন,
- দুইটি ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের যোগফল বা বিয়োগফলকে ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের গুণফলে রূপান্তর করতে পারবেন,
- এতদসংক্রান্ত সমস্যার সমাধানে দক্ষতা অর্জন করবেন।

মুখ্য শব্দ	অনুপাতের রূপান্তর

মূলপাঠ

দুইটি ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের গুণফলকে অপর দুইটি ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের যোগফল ও বিয়োগফলে রূপান্তর

পূর্ববর্তী পাঠে প্রমাণিত সূত্র হতে আপনারা জানেন-

$\sin A\cos B+\cos A\sin B=\sin(A+B)$ - - - - - - - - - (i)

$\sin A\cos B-\cos A\sin B=\sin(A-B)$ - - - - - - - - - (ii)

(i) ও (ii) নং যোগ করলে পাওয়া যায়, $2\sin A\cos B=\sin(A-B)+\sin(A-B)$

আবার (i) থেকে (ii) বিয়োগ করলে পাওয়া যায়, $2\cos A\sin B=\sin(A+B)-\sin(A-B)$

আবার, $\cos A\cos B-\sin A\sin B=\cos(A+B)$ - - - - - - - (iii)

এবং $\cos A\cos B+\sin A\sin B=\cos(A-B)$ - - - - - - - - - (iv)

এখন (iii) ও (iv) যোগ করলে পাওয়া যায়, $2\cos A\cos B=\cos(A+B)+\cos(A-B)$

এবং (iv) থেকে (iii) বিয়োগ করলে পাওয়া যায়, $2\sin A\sin B=\cos(A-B)-\cos(A+B)$

সুতরাং দুইটি ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের গুণফলকে অপর দুইটি ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের যোগফল বা বিয়োগফল রূপে নিম্নলিখিত সূত্রগুলির সাহায্যে প্রকাশ করা যায়-

$2\sin A\cos B=\sin(A+B)+\sin(A-B)$ - - - - - - (v)

$2\cos A\sin B=\sin(A+B)-\sin(A-B)$ - - - - - - (vi)

$2\cos A \cos B = \cos (A+B) + \cos (A-B)$ - - - - - (vii)
$2\sin A \sin B = \cos (A-B) - \cos (A+B)$ - - - - - - (viii)

সুতরাং (v) ও (vi) নং সূত্র অনুযায়ী একটি sine ও একটি cosine- এর গুণফলকে দুইটি sine এর যোগ ও বিয়োগফলে প্রকাশ করা হয়েছে। (vii) নং সূত্র অনুযায়ী দুইটি cosine এর গুণফলকে দুইটি cosine এর যোগফলে এবং (viii) নং সূত্র অনুযায়ী দুইটি sine এর গুণফলকে দুইটি cosine এর বিয়োগফলে প্রকাশ করা হয়েছে।

দুইটি ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের যোগফল ও বিয়োগফলে ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের গুণফলে রূপান্তর

মনে করুন $A+B = C$ এবং $A-B = D$

তাহলে $A = \frac{C+D}{2}$ এবং $B = \frac{C-D}{2}$

তাহলে (v) হতে (viii) নং সূত্রগুলোর A ও B এর স্থলে উপরোক্ত মানগুলো স্থাপন করলে আমরা পাই-

$$\sin C + \sin D = 2\sin\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2} \text{ - - - - - - - - (ix)}$$

$$\sin C - \sin D = 2\cos\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2} \text{ - - - - - - - - (x)}$$

$$\cos C + \cos D = 2\cos\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2} \text{ - - - - - - - (xi)}$$

$$\cos D - \cos C = 2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2} \text{ - - - - - - - - (xii)}$$

(xii) নং সূত্রকে নিম্নোক্তভাবেও প্রকাশ করা যায়-

$$\cos C - \cos D = -2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2} = 2\sin\frac{C+D}{2}\left(-\sin\frac{C-D}{2}\right) = 2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{D-C}{2}$$

$$\therefore \cos C - \cos D = 2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{D-C}{2}.$$

উদাহরণ 1: প্রমাণ করুন $\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 60^\circ \sin 80^\circ = \frac{3}{16}$

সমাধানঃ $\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 60^\circ \sin 80^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ \quad \left[\because \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\sin 20^\circ.2\sin 40^\circ \sin 80^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}\sin 20^\circ\left[\cos(80^\circ - 40^\circ) - \cos(80^\circ + 40^\circ)\right]$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\sin 20^\circ\left[\cos 40^\circ - \cos 120^\circ\right] = \frac{\sqrt{3}}{4}\sin 20^\circ\left[\cos 40^\circ + \frac{1}{2}\right] \quad \left[\because \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}\right]$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\sin 20^\circ \cos 40^\circ + \frac{\sqrt{3}}{8}\sin 20^\circ = \frac{\sqrt{3}}{8}\left[2\sin 20^\circ \cos 40^\circ\right] + \frac{\sqrt{3}}{8}\sin 20^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{8}\left[\sin(40^\circ + 20^\circ) - \sin(40^\circ - 20^\circ)\right] + \frac{\sqrt{3}}{8}\sin 20^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{8}\left[\sin 60^\circ - \sin 20^\circ\right] + \frac{\sqrt{3}}{8}\sin 20^\circ = \frac{\sqrt{3}}{8}\left[\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin 20^\circ\right] + \frac{\sqrt{3}}{8}\sin 20^\circ$$

$$= \frac{3}{16} - \frac{\sqrt{3}}{8}\sin 20^\circ + \frac{\sqrt{3}}{8}\sin 20^\circ = \frac{3}{16}$$

উদাহরণ 2: প্রমাণ করুন $\cos 40^\circ + \cos 80^\circ + \cos 160^\circ = 0$

সমাধানঃ $\cos 40^\circ + \cos 80^\circ + \cos 160^\circ = \cos 40^\circ + 2\cos\left(\frac{80^\circ + 160^\circ}{2}\right)\cos\left(\frac{80^\circ - 160^\circ}{2}\right)$

$$= \cos 40^\circ + 2\cos\frac{240^\circ}{2}\cos\left(\frac{-80^\circ}{2}\right) = \cos 40^\circ + 2\cos 120^\circ \cos 40^\circ \quad [\because \cos(-\theta) = \cos\theta]$$

$$= \cos 40^\circ + 2\left(-\frac{1}{2}\right)\cos 40^\circ = \cos 40^\circ - \cos 40^\circ = 0$$

উদাহরণ 3: প্রমাণ করুন $\cos 85^\circ + \sin 85^\circ = \sqrt{2}\cos 40^\circ$

সমাধানঃ $\cos 85^\circ + \sin 85^\circ = \cos 85^\circ + \sin(90^\circ - 5^\circ) = \cos 85^\circ + \cos 5^\circ$

$$= 2\cos\left(\frac{85^\circ + 5^\circ}{2}\right)\cos\left(\frac{85^\circ - 5^\circ}{2}\right) = 2\cos 45^\circ \cos 40^\circ = 2.\frac{1}{\sqrt{2}}\cos 40^\circ = \sqrt{2}\cos 40^\circ$$

উদাহরণ 4: প্রমাণ করুন $\sin 105^\circ + \cos 105^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$

সমাধানঃ $\sin 105^\circ + \cos 105^\circ = \sin 105^\circ + \cos(90^\circ + 15^\circ) = \sin 105^\circ - \sin 15^\circ$

$$= 2\cos\left(\frac{105^\circ + 15^\circ}{2}\right)\sin\left(\frac{105^\circ - 15^\circ}{2}\right) = 2\cos\left(\frac{120^\circ}{2}\right)\sin\left(\frac{90^\circ}{2}\right)$$

$$= 2\cos 60^\circ \sin 45^\circ = 2.\frac{1}{2}.\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

উদাহরণ 5: প্রমাণ করুন $16\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{8\pi}{15}\cos\frac{14\pi}{15} = 1$

সমাধানঃ $16\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{8\pi}{15}\cos\frac{14\pi}{15} = 4.2\cos\frac{8\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}.2\cos\frac{14\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}$

$$= 4\left[\cos\left(\frac{8\pi}{15} + \frac{2\pi}{15}\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{15} - \frac{2\pi}{15}\right)\right]\left[\cos\left(\frac{14\pi}{15} + \frac{4\pi}{15}\right)\cos\left(\frac{14\pi}{15} - \frac{4\pi}{15}\right)\right]$$

$$= 4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + \cos\frac{2\pi}{5}\right)\left(\cos\frac{6\pi}{5} + \cos\frac{2\pi}{3}\right) = 4\left(-\frac{1}{2} + \cos\frac{2\pi}{5}\right)\left(\cos\frac{6\pi}{5} - \frac{1}{2}\right)$$

$$= 4\left(-\frac{1}{2}\cos\frac{6\pi}{5} + \frac{1}{4} + \cos\frac{2\pi}{5}\cos\frac{6\pi}{5} - \frac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{5}\right)$$

$$= 4\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{5} - \frac{1}{2}\cos\frac{6\pi}{5} + \cos\frac{2\pi}{5}\cos\frac{6\pi}{5}\right)$$

$$= 4\left\{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{5} - \frac{1}{2}\cos\left(\pi + \frac{\pi}{5}\right) + \frac{1}{2}\left(2\cos\frac{2\pi}{5}\cos\frac{6\pi}{5}\right)\right\}$$

$$= 4\left\{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{5} + \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{5} + \frac{1}{2}\left(\cos\frac{8\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5}\right)\right\}$$

$$= 4\left\{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{5} + \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{5} + \frac{1}{2}\cos\left(2\pi - \frac{2\pi}{5}\right) + \frac{1}{2}\cos\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right)\right\}$$

$$=4\left\{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{5}+\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{5}+\frac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{5}-\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{5}\right\}=4.\frac{1}{4}=1$$

উদাহরণ 6: প্রমাণ করুন $\sin A-\sin(A-60^\circ)-\sin(A+60^\circ)=0$

সমাধান: $\sin A-\sin(A-60^\circ)-\sin(A+60^\circ)=\sin A-[\sin(A-60^\circ)+\sin(A+60^\circ)]$

$$=\sin A-2\sin\left(\frac{A-60^\circ+A+60^\circ}{2}\right)\cos\left(\frac{A+60^\circ-A+60^\circ}{2}\right)=\sin A-2\sin\left(\frac{2A}{2}\right)\cos\left(\frac{120^\circ}{2}\right)$$

$$=\sin A-2\sin A\cos 60^\circ=\sin A-2\sin A.\frac{1}{2}=\sin A-\sin A=0$$

উদাহরণ 7: প্রমাণ করুন $\frac{\cos A+\cos B}{\cos A-\cos B}=\cot\frac{1}{2}(A+B)\cot\frac{1}{2}(B-A)$

সমাধান: $\frac{\cos A+\cos B}{\cos A-\cos B}=\frac{2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{B-A}{2}\right)}$

$$=\frac{\cos\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(B-A)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)\sin\frac{1}{2}(B-A)}\quad[\because\cos(-\theta)=\cos\theta]\qquad=\cot\frac{1}{2}(A+B)\cot\frac{1}{2}(B-A)$$

উদাহরণ 8: প্রমাণ করুন $\cos A\sin(30^\circ+A)\sin(30^\circ-A)=\frac{1}{4}\cos 3A$

সমাধান: $\cos A\sin(30^\circ+A)\sin(30^\circ-A)=\cos A.\frac{1}{2}\{2\sin(30^\circ+A)\sin(30^\circ-A)\}$

$$=\frac{1}{2}\cos A\{\cos(30^\circ+A-30^\circ+A)-\cos(30^\circ+A+30^\circ-A)\}$$

$$=\frac{1}{2}\cos A(\cos 2A-\cos 60^\circ)=\frac{1}{2}\cos A\left(\cos 2A-\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\cos A\cos 2A-\frac{1}{4}\cos A=\frac{1}{4}(2\cos A\cos 2A)-\frac{1}{4}\cos A$$

$$=\frac{1}{4}(\cos 3A+\cos A)-\frac{1}{4}\cos A=\frac{1}{4}\cos 3A+\frac{1}{4}\cos A-\frac{1}{4}\cos A=\frac{1}{4}\cos 3A$$

উদাহরণ 9: প্রমাণ করুন $\cot(A+15^\circ)-\tan(A-15^\circ)=\frac{4\cos 2A}{2\sin 2A+1}$

সমাধান: ধরুন $\theta=A+15^\circ$ এবং $\phi=A-15^\circ$

$\therefore\theta+\phi=2A$ এবং $\theta-\phi=30^\circ$

এখন $\cot(A+15^\circ)-\tan(A-15^\circ)=\cot\theta-\tan\phi=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}-\frac{\sin\phi}{\cos\phi}$

$$=\frac{\cos\theta\cos\phi-\sin\theta\sin\phi}{\sin\theta\cos\phi}=\frac{\cos(\theta+\phi)}{\sin\theta\cos\phi}=\frac{2\cos(\theta+\phi)}{2\sin\theta\cos\phi}=\frac{2\cos(\theta+\phi)}{\sin(\theta+\phi)+\sin(\theta-\phi)}$$

$$=\frac{2\cos 2A}{\sin 2A+\sin 30^{\circ}}=\frac{2\cos 2A}{\sin 2A+\frac{1}{2}}=\frac{4\cos 2A}{2\sin 2A+1}$$

উদাহরণ 10: যদি $\sin x+\sin y=a$ এবং $\cos x+\cos y=b$ হয় তবে দেখান যে,

$$\sin\frac{1}{2}(x-y)=\pm\frac{1}{2}\sqrt{4-a^2-b^2}$$

সমাধানঃ $\sin x+\sin y=a \Rightarrow 2\sin\frac{1}{2}(x+y)\cos\frac{1}{2}(x-y)=a$ ------------------(i)

আবার, $\cos x+\cos y=b \Rightarrow$ বা, $2\cos\frac{1}{2}(x+y)\cos\frac{1}{2}(x-y)=b$ ------------------(ii)

(i) ও (ii) নং কে বর্গ ও পরে যোগ করে পাওয়া যায়,

$$4\cos^2\frac{1}{2}(x-y)\left\{\sin^2\frac{1}{2}(x+y)+\cos^2\frac{1}{2}(x+y)\right\}=a^2+b^2$$

$$\Rightarrow 4\cos^2\frac{1}{2}(x-y).1=a^2+b^2 \Rightarrow 4\left\{1-\sin^2\frac{1}{2}(x-y)\right\}=a^2+b^2 \Rightarrow 4-4\sin^2\frac{1}{2}(x-y)=a^2+b^2$$

$$\Rightarrow 4\sin^2\frac{1}{2}(x-y)=4-a^2+b^2 \Rightarrow \sin^2\frac{1}{2}(x-y)=\frac{1}{4}\left(4-a^2+b^2\right)$$

$$\Rightarrow \sin\frac{1}{2}(x-y)=\pm\frac{1}{2}\sqrt{4-a^2+b^2}$$

উদাহরণ 11: যদি $A\neq B$ এবং $\sin A+\cos A=\sin B+\cos B$ হয়, তবে দেখান যে, $A+B=\frac{\pi}{2}$

সমাধানঃ $\sin A+\cos A=\sin B+\cos B \quad \Rightarrow \sin A-\sin B=\cos B-\cos A$

$$\Rightarrow 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)=2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{A+B}{2}\right)=\sin\left(\frac{A+B}{2}\right) \quad \Rightarrow \frac{\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)}{\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)}=1 \quad \Rightarrow \tan\left(\frac{A+B}{2}\right)=1=\tan\frac{\pi}{4}$$

$$\therefore \frac{A+B}{2}=\frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow A+B=\frac{\pi}{2}$$

উদাহরণ 12: যদি $n\sin\beta=m\sin(2\alpha+\beta)$ হয় তবে দেখান যে, $\cot(\alpha+\beta)=\frac{n-m}{n+m}\cot\alpha$

সমাধানঃ $n\sin\beta=m\sin(2\alpha+\beta)$

$$\Rightarrow \frac{\sin\beta}{\sin(2\alpha+\beta)}=\frac{m}{n} \Rightarrow \frac{\sin(2\alpha+\beta)-\sin\beta}{\sin(2\alpha+\beta)+\sin\beta}=\frac{n-m}{n+m}$$ [বিয়োজন-যোজন প্রক্রিয়ার সাহায্যে]

$$\Rightarrow \frac{2\cos\left(\frac{2\alpha+\beta+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{2\alpha+\beta-\beta}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{2\alpha+\beta+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{2\alpha+\beta-\beta}{2}\right)}=\frac{n-m}{n+m} \quad \Rightarrow \frac{\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha}=\frac{n-m}{n+m}$$

$$\Rightarrow \cot(\alpha+\beta)\tan\alpha=\frac{n-m}{n+m} \Rightarrow \cot(\alpha+\beta)=\frac{n-m}{n+m}.\frac{1}{\tan\alpha} \Rightarrow \cot(\alpha+\beta)=\frac{n-m}{n+m}\cot\alpha$$

উদাহরণ 13: যদি $a\cos\alpha+b\sin\alpha=a\cos\beta+b\sin\beta$ হয় তবে দেখান যে,

$$\cos^2\frac{1}{2}(\alpha+\beta)-\sin^2\frac{1}{2}(\alpha+\beta)=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$$

সমাধান: $a\cos\alpha+b\sin\alpha=a\cos\beta+b\sin\beta \Rightarrow b\sin\alpha-b\sin\beta=a\cos\beta-a\cos\alpha$

$$\Rightarrow b(\sin\alpha-\sin\beta)=a(\cos\beta-\cos\alpha) \Rightarrow \frac{\sin\alpha-\sin\beta}{\cos\beta-\cos\alpha}=\frac{a}{b}$$

$$\Rightarrow \frac{2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}=\frac{a}{b} \quad \Rightarrow \frac{\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}=\frac{a}{b} \quad \Rightarrow \frac{\cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}=\frac{a^2}{b^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$$ [বিয়োজন যোজন করে]

$$\Rightarrow \cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$$

উদাহরণ 14: যদি $\alpha+\beta=\theta$ এবং $\cos\alpha=k\cos\beta$ হয় তবে দেখান যে, $\tan\frac{1}{2}(\alpha-\beta)=\frac{1-k}{1+k}\cot\frac{1}{2}\theta$

সমাধান: $\cos\alpha=k\cos\beta \Rightarrow \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}=\frac{1}{k} \Rightarrow \frac{\cos\beta-\cos\alpha}{\cos\beta+\cos\alpha}=\frac{1-k}{1+k}$ [বিয়োজন-যোজন করে]

$$\Rightarrow \frac{2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}=\frac{1-k}{1+k} \Rightarrow \tan\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\tan\frac{1}{2}(\alpha-\beta)=\frac{1-k}{1+k}$$

$$\Rightarrow \tan\frac{1}{2}\theta\tan\frac{1}{2}(\alpha-\beta)=\frac{1-k}{1+k} \quad \Rightarrow \tan\frac{1}{2}(\alpha-\beta)=\frac{1-k}{1+k}.\frac{1}{\tan\frac{1}{2}\theta}$$

$$\Rightarrow \tan\frac{1}{2}(\alpha-\beta)=\frac{1-k}{1+k}.\cot\frac{1}{2}\theta$$

সারসংক্ষেপ

- $2\sin A\cos B=\sin(A+B)+\sin(A-B)$
- $2\cos A\sin B=\sin(A+B)-\sin(A-B)$
- $2\cos A\cos B=\cos(A+B)+\cos(A-B)$
- $2\sin A\sin B=\cos(A-B)-\cos(A+B)$
- $\sin C+\sin D=2\sin\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}$
- $\sin C-\sin D=2\cos\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}$
- $\cos C+\cos D=2\cos\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}$
- $\cos C-\cos D=2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{D-C}{2}$

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৮.৩

প্রমাণ করুন (1-8)

1. (i) $\sin 50^\circ - \sin 70^\circ + \sin 10^\circ = 0$ (ii) $\sin 5^\circ + \sin 125^\circ + \sin 245^\circ = 0$
   (iii) $\cos 20^\circ + \cos 100^\circ + \cos 140^\circ = 0$ (iv) $\cos 70^\circ - \cos 10^\circ + \cos 40^\circ = 0$
   (v) $\cos 40^\circ + \cos 80^\circ + \cos 160^\circ = 0$
2. (i) $\cos 10^\circ \cos 50^\circ \cos 70^\circ = \frac{\sqrt{3}}{8}$ (ii) $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 60^\circ \cos 80^\circ = \frac{1}{16}$
   (iii) $\tan 20^\circ \tan 40^\circ \tan 80^\circ = \sqrt{3}$ (iv) $\tan 20^\circ \tan 40^\circ \tan 60^\circ \tan 80^\circ = \sqrt{3}$
3. (i) $\sin(45^\circ + \theta)\sin(45^\circ - \theta) = \frac{1}{2}\cos 2\theta$ (ii) $\sec\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right)\sec\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) = 2\sec 2\theta$
   (iii) $\tan\left(\frac{45^\circ + \theta}{2}\right)\tan\left(\frac{45^\circ - \theta}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}\cos\theta - 1}{\sqrt{2}\cos\theta + 1}$ (iv) $\sin\theta\sin(60^\circ - \theta)\sin(60^\circ + \theta) = \frac{1}{4}\sin 3\theta$
   (v) $\cos\theta\cos(60^\circ - \theta)\cos(60^\circ + \theta) = \frac{1}{4}\cos 3\theta$
   (vi) $4\cos\theta\cos\left(\frac{2\pi}{3} + \theta\right)\cos\left(\frac{4\pi}{3} + \theta\right) = \cos 3\theta$
4. (i) $\sin\theta + \sin(60^\circ - \theta) - \sin(60^\circ + \theta) = 0$ (ii) $\cos(60^\circ - \theta) + \cos(60^\circ + \theta) - \cos\theta = 0$
   (iii) $\sin\theta + \sin(120^\circ + \theta) + \sin(240^\circ + \theta) = 0$ (iv) $\cos\theta + \cos(120^\circ - \theta) + \cos(120^\circ + \theta) = 0$
5. (i) $\frac{\sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha}{\cos\alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha} = \tan 3\alpha$ (ii) $\frac{\cos 2A + \cos 5A + \cos A}{\sin 2A + \sin 5A - \sin A} = \cot 2A$
   (iii) $\frac{\sin(A - B) + \sin A + \sin(A + B)}{\sin(C - B) + \sin C + \sin(C + B)} = \frac{\sin A}{\sin C}$
6. (i) $\frac{\sin\theta + \sin 2\theta + \sin 4\theta + \sin 5\theta}{\cos\theta + \cos 2\theta + \cos 4\theta + \cos 5\theta} = \tan 3\theta$ (ii) $\frac{\sin(\alpha + \beta) - 2\sin\alpha + \sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta) - 2\cos\alpha + \cos(\alpha - \beta)} = \tan\alpha$
7. (i) $\sin 18^\circ + \cos 18^\circ = \sqrt{2}\cos 27^\circ$ (ii) $\sin 55^\circ + \cos 55^\circ = \sqrt{2}\cos 10^\circ$
   (iii) $\sin 75^\circ + \cos 75^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$
8. $\tan 70^\circ = \tan 20^\circ + 2\tan 50^\circ$
9. যদি $\sin\theta + \sin\phi = \sqrt{3}(\cos\phi - \cos\theta)$ হয় তবে দেখান যে, $\cos^2\frac{1}{2}(\theta - \phi) = \frac{3}{4}$
10. যদি $\sin A = \frac{1}{\sqrt{2}}$ এবং $\sin B = \frac{1}{\sqrt{3}}$ হয়, তবে প্রমাণ করুন যে, $\tan\frac{1}{2}(A + B)\cot\frac{1}{2}(A - B) = 5 + 2\sqrt{6}$
11. যদি $\sin x = m\sin y$ হয় তবে দেখান যে, $\tan\frac{1}{2}(x - y) = \frac{m - 1}{m + 1}\tan\frac{1}{2}(x + y)$
12. যদি $\sin x - \sin y = \frac{3}{5}$ এবং $\cos y - \cos x = \frac{1}{5}$ হয় তবে দেখান যে, $\cos\frac{1}{2}(x + y) = 3$
13. যদি $x\cos\alpha + y\sin\alpha = k = x\cos\beta + y\sin\beta$ হয়, তবে প্রমাণ করুন যে,

$$\frac{x}{\cos\frac{1}{2}(\alpha + \beta)} = \frac{y}{\sin\frac{1}{2}(\alpha + \beta)} = \frac{k}{\cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta)}$$

14. দেখান যে, $2\cos\frac{\pi}{13}\cos\frac{9\pi}{13}+\cos\frac{3\pi}{13}+\cos\frac{5\pi}{13}=0$

15. যদি $\operatorname{cosec}A+\sec A=\operatorname{cosec}B+\sec B$ হয় তবে দেখান যে, $\tan A\tan B=\cot\frac{1}{2}(A+B)$

16. যদি $\sin\theta+\sin\phi=a$ এবং $\cos\theta+\cos\phi=b$ হয় তবে দেখান যে, $\tan\frac{\theta-\phi}{2}=\pm\sqrt{\frac{4-a^2-b^2}{a^2+b^2}}$

17. প্রমাণ করুন যে, $\left(\frac{\cos A+\cos B}{\sin A-\sin B}\right)^n+\left(\frac{\sin A+\sin B}{\cos A-\cos B}\right)^n=2\cot^n\frac{A-B}{2}$ অথবা 0, যখন n যথাক্রমে জোড় অথবা বিজোড় সংখ্যা।

18. যদি $A+B+C=\pi$ এবং $\sin\left(A+\frac{C}{2}\right)=n\sin\frac{C}{2}$ হয় তবে দেখান যে, $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}=\frac{n-1}{n+1}$

পাঠ ৮.৪ গুণিতক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- গুণিতক কোণ-এর সংজ্ঞা বলতে পারবেন,
- গুণিতক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নির্ণয় করতে পারবেন,
- এতদসংক্রান্ত সমস্যার সমাধান করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	গুণিতক কোণ

মূলপাঠ

গুণিতক কোণ (Multiple Angle)

কোন কোণকে একটি পূর্ণ সংখ্যা দ্বারা গুণ করলে যে কোণ পাওয়া যায় তাকে মূল কোণের গুণিতক কোণ বলে। যেমন, $2A$, $3A$, $4A$ ইত্যাদি কোণ A কোণের গুণিতক কোণ। এই পাঠে $2A$, $3A$ প্রভৃতি গুণিতক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলোকে মূল কোণ A এর ত্রিকোণমিতিক অনুপাতে প্রকাশ করা হবে।

$2A$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

আপনারা জানেন, $\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$

এবং $\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$

প্রথম সূত্রে $B=A$ বসিয়ে পাওয়া যায়, $\sin(A+A)=\sin A\cos A+\cos A\sin A$

বা, $\sin 2A=2\sin A\cos A$ - - - - - - - (i)

আবার দ্বিতীয় সূত্রে $B=A$ বসিয়ে পাওয়া যায়, $\cos(A+A)=\cos A.\cos A-\sin A.\sin A$

বা, $\cos 2A=\cos^2 A-\sin^2 A$ - - - - - - (ii)

বা, $\cos 2A=1-\sin^2 A-\sin^2 A=1-2\sin^2 A$ - - - - - - (iii)

আবার, $\cos 2A=\cos^2 A-(1-\cos^2 A)=\cos^2 A-1+\cos^2 A=2\cos^2 A-1$ - - - - - (iv)

এখন (iii) ও (iv) এর পক্ষ পরিবর্তন করলে পাওয়া যায়-

$1-\cos 2A=2\sin^2 A$ - - - - - - - (v)

এবং $1+\cos 2A=2\cos^2 A$ - - - - - - -(vi)

(v) কে (vi) দ্বারা ভাগ করলে পাওয়া যায়-

$$\frac{1-\cos 2A}{1+\cos 2A}=\frac{2\sin^2 A}{2\cos^2 A}=\tan^2 A \text{ - - - - - (vii)}$$

লক্ষনীয় যে, $1+\sin 2A=\cos^2 A+\sin^2 A+2\sin A\cos A=(\cos A+\sin A)^2$

$1-\sin 2A=\cos^2 A+\sin^2 A-2\sin A\cos A=(\cos A-\sin A)^2$

আবার আপনারা জানেন, $\tan(A+B)=\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$

এখন $B=A$ বসিয়ে পাওয়া যায়, $\tan(A+A)=\dfrac{\tan A+\tan A}{1-\tan A\tan A}$

বা, $\tan 2A=\dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$ - - - - - - (viii)

আবার, $\cot(A+B)=\dfrac{\cot A\cot B-1}{\cot A+\cot B}$ সূত্রে $B=A$ বসিয়ে পাওয়া যায়, $\cot 2A=\dfrac{\cot^2 A-1}{2\cot A}$ - - - - - - - (ix)

sin 2*A* এবং cos 2*A* অনুপাতকে tan *A* অনুপাতে প্রকাশ

$$\sin 2A=2\sin A\cos A=\frac{2\sin A}{\cos A}.\cos^2 A=2\tan A.\frac{1}{\sec^2 A}=\frac{2\tan A}{\sec^2 A}=\frac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$$

$$\cos 2A=\cos^2 A-\sin^2 A=\cos^2 A\left(1-\frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}\right)=\frac{1}{\sec^2 A}\left(1-\tan^2 A\right)=\frac{1-\tan^2 A}{\sec^2 A}=\frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$$

3*A* কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

$\sin 3A=\sin(2A+A)$

$=\sin 2A\cos A+\cos 2A\sin A=2\sin A\cos A\cos A+(1-2\sin^2 A)\sin A$

$=2\sin A\cos^2 A+\sin A-2\sin^3 A=2\sin A(1-\sin^2 A)+\sin A-2\sin^3 A$

$=2\sin A-2\sin^3 A+\sin A-2\sin^3 A=3\sin A-4\sin^3 A$

$\therefore \sin 3A=3\sin A-4\sin^3 A.$

$\cos 3A=\cos(A+2A)$

$=\cos 2A\cos A-\sin 2A\sin A=(2\cos^2 A-1)\cos A-2\sin A\cos A\sin A$

$=2\cos^3 A-\cos A-2\cos A\sin^2 A=2\cos^3 A-\cos A-2\cos A(1-\cos^2 A)$

$=2\cos^3 A-\cos A-2\cos A+2\cos^3 A=4\cos^3 A-3\cos A$

$\therefore \cos 3A=4\cos^3 A-3\cos A.$

$$\tan 3A=\tan(2A+A)=\frac{\tan 2A+\tan A}{1-\tan 2A\tan A}=\frac{\dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A}+\tan A}{1-\dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A}.\tan A}=\frac{\dfrac{2\tan A+\tan A-\tan^3 A}{1-\tan^2 A}}{\dfrac{1-\tan^2 A-2\tan^2 A}{1-\tan^2 A}}$$

$$\therefore \tan 3A=\frac{3\tan A-\tan^3 A}{1-3\tan^2 A}$$

উদাহরণ 1: প্রমাণ করুন $\sin 2x\tan 2x=\dfrac{4\tan^2 x}{1-\tan^4 x}$

সমাধানঃ $\sin 2x\tan 2x=\dfrac{2\tan x}{1+\tan^2 x}.\dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}=\dfrac{4\tan^2 x}{1-\tan^4 x}$

উদাহরণ 2: প্রমাণ করুন $\frac{1}{\sin 10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ} = 4$

সমাধান: $\frac{1}{\sin 10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ} = \frac{\cos 10^\circ - \sqrt{3}\sin 10^\circ}{\sin 10^\circ \cos 10^\circ} = \frac{4\left(\frac{1}{2}\cos 10^\circ - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 10^\circ\right)}{2\sin 10^\circ \cos 10^\circ}$

$= \frac{4(\cos 60^\circ \cos 10^\circ - \sin 60^\circ \sin 10^\circ)}{\sin 20^\circ} \left[\because \cos 60^\circ = \frac{1}{2},\ \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

$= \frac{4\cos(60^\circ + 10^\circ)}{\sin 20^\circ} = \frac{4\cos 70^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{4\cos(90^\circ - 20^\circ)}{\sin 20^\circ} = \frac{4\cos 20^\circ}{\sin 20^\circ} = 4$

উদাহরণ 3: প্রমাণ করুন $\frac{1-\cos 2\theta + \sin 2\theta}{1+\cos 2\theta + \sin 2\theta} = \tan\theta$

সমাধান: $\frac{1-\cos 2\theta + \sin 2\theta}{1+\cos 2\theta + \sin 2\theta} = \frac{2\sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta}{2\cos^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta} = \frac{2\sin\theta(\sin\theta + \cos\theta)}{2\cos\theta(\sin\theta + \cos\theta)} = \tan\theta$

উদাহরণ 4: প্রমাণ করুন $\frac{\sin 3A}{\sin 2A - \sin A} = 2\cos A + 1$

সমাধান: $\frac{\sin 3A}{\sin 2A - \sin A} = \frac{3\sin A - 4\sin^3 A}{2\sin A\cos A - \sin A} = \frac{\sin A(3 - 4\sin^2 A)}{\sin A(2\cos A - 1)} = \frac{3 - 4(1-\cos^2 A)}{2\cos A - 1}$

$= \frac{3 - 4 + 4\cos^2 A}{2\cos A - 1} = \frac{4\cos^2 A - 1}{2\cos A - 1} = \frac{(2\cos A - 1)(2\cos A + 1)}{2\cos A - 1} = 2\cos A + 1$

উদাহরণ 5: প্রমাণ করুন $\cos 5\theta = 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta$

সমাধান: $\cos 5\theta = \cos(4\theta + \theta) = \cos 4\theta\cos\theta - \sin 4\theta\sin\theta$

$= (2\cos^2 2\theta - 1)\cos\theta - 2\sin 2\theta\cos 2\theta\sin\theta$

$= \{2(2\cos^2\theta - 1)^2 - 1\}\cos\theta - 2.2\sin\theta\cos\theta(2\cos^2\theta - 1)\sin\theta$

$= \{2(4\cos^4\theta - 4\cos^2\theta + 1) - 1\}\cos\theta - 4\cos\theta(2\cos^2\theta - 1)\sin^2\theta$

$= (8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 2 - 1)\cos\theta - (8\cos^3\theta - 4\cos\theta)(1 - \cos^2\theta)$

$= (8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1)\cos\theta - (8\cos^3\theta - 4\cos\theta - 8\cos^5\theta + 4\cos^3\theta)$

$= 8\cos^5\theta - 8\cos^3\theta + \cos\theta - 8\cos^3\theta + 4\cos\theta + 8\cos^5\theta - 4\cos^3\theta$

$= 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta$

উদাহরণ 6: প্রমাণ করুন $\cos^3 A\cos 3A + \sin^3 A\sin 3A = \cos^3 2A$

সমাধান: $\cos^3 A\cos 3A + \sin^3 A\sin 3A = \frac{1}{4}(\cos 3A + 3\cos A)\cos 3A + \frac{1}{4}(3\sin A - \sin 3A)\sin 3A$

$= \frac{1}{4}(\cos^2 3A - \sin^2 3A) + \frac{3}{4}(\cos 3A\cos A - \sin 3A\sin A)$

$= \frac{1}{4}\cos 6A + \frac{3}{4}\cos(3A - A) = \frac{1}{4}\cos 6A + \frac{3}{4}\cos 2A = \frac{1}{4}(\cos 6A + 3\cos 2A) = \cos^3 2A$

[দ্রষ্টব্য ঃ যেহেতু $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$ $\therefore \cos^3 A = \frac{1}{4}(\cos 3A + 3\cos A)$

এবং $\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$ $\therefore \sin^3 A = \frac{1}{4}(3\sin A - \sin 3A)$

এবং $\cos^3 2A = \frac{\cos 3.2A + 3\cos 2A}{4} = \frac{1}{4}(\cos 6A + 3\cos 2A)$]

উদাহরণ 7: প্রমাণ করুন $\frac{\sin\alpha - \sqrt{1+\sin 2\alpha}}{\cos\alpha - \sqrt{1+\sin 2\alpha}} = \cot\alpha,\ \alpha$ ধনাত্মক ও সূক্ষ্মকোণ এবং বর্গমূলের চিহ্ন ধনাত্মক।

সমাধান: $\frac{\sin\alpha - \sqrt{1+\sin 2\alpha}}{\cos\alpha - \sqrt{1+\sin 2\alpha}} = \frac{\sin\alpha - \sqrt{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha}}{\cos\alpha - \sqrt{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha}}$

$$= \frac{\sin\alpha - \sqrt{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2}}{\cos\alpha - \sqrt{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2}} = \frac{\sin\alpha - \sin\alpha - \cos\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha - \cos\alpha} = \frac{-\cos\alpha}{-\sin\alpha} = \cot\alpha$$

উদাহরণ 8: যদি $\tan\theta = \frac{1}{2}$ হয় দেখান যে, $10\sin 2\theta - 6\tan 2\theta + 5\cos 2\theta = 3$

সমাধান: $10\sin 2\theta - 6\tan 2\theta + 5\cos 2\theta = 10.\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta} - 6.\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} + 5.\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$

$$= 10.\frac{2.\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{4}} - 6.\frac{2.\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}} + 5.\frac{1-\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{4}} = 10.\frac{4}{5} - 6.\frac{4}{3} + 5.\frac{3}{4} = 8 - 8 + 3 = 3$$

উদাহরণ 9: প্রমাণ করুন $\frac{\sin 8\theta}{\cos 4\theta}.\frac{1-\cos 4\theta}{1-\cos 8\theta} = \tan 2\theta$

সমাধান: $\frac{\sin 8\theta}{\cos 4\theta}.\frac{1-\cos 4\theta}{1-\cos 8\theta} = \frac{2\sin 4\theta\cos 4\theta}{\cos 4\theta}.\frac{2\sin^2 2\theta}{2\sin^2 4\theta}$

$$= \frac{2\sin^2 2\theta}{\sin 4\theta} = \frac{2\sin^2 2\theta}{2\sin 2\theta\cos 2\theta} = \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} = \tan 2\theta$$

উদাহরণ 10: প্রমাণ করুন $\frac{\sin^2\alpha - \sin^2\beta}{\sin\alpha\cos\alpha - \sin\beta\cos\beta} = \tan(\alpha+\beta)$

সমাধান: $\frac{\sin^2\alpha - \sin^2\beta}{\sin\alpha\cos\alpha - \sin\beta\cos\beta} = \frac{2\sin^2\alpha - 2\sin^2\beta}{2\sin\alpha\cos\alpha - 2\sin\beta\cos\beta} = \frac{(1-\cos 2\alpha)-(1-\cos 2\beta)}{\sin 2\alpha - \sin 2\beta}$

$$= \frac{\cos 2\beta - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha - \sin 2\beta} = \frac{2\sin\frac{1}{2}(2\alpha+2\beta)\sin\frac{1}{2}(2\alpha-2\beta)}{2\cos\frac{1}{2}(2\alpha+2\beta)\sin\frac{1}{2}(2\alpha-2\beta)} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \tan(\alpha+\beta)$$

উদাহরণ 11: প্রমাণ করুন $\cos^3 x + \cos^3(60^\circ - x) + \cos^3(60^\circ + x) = \frac{1}{4}(6\cos x - \cos 3x)$

সমাধান: $\cos^3 x + \cos^3(60^\circ - x) + \cos^3(60^\circ + x) = \frac{1}{4}[\cos^3 x + \cos^3(60^\circ - x) + \cos^3(60^\circ + x)]$

$$= \frac{1}{4}[3\cos x + \cos 3x + 3\cos(60^\circ - x) + \cos 3(60^\circ - x) + 3\cos(60^\circ + x) + \cos 3(60^\circ + x)]$$

$$= \frac{1}{4}[3\cos x + \cos 3x + 3\{\cos(60^\circ + x) + \cos(60^\circ - x)\} + \cos(180^\circ - 3x) + \cos(180^\circ + 3x)]$$

$$=\frac{1}{4}\left[3\cos x+\cos 3x+3.2\cos\left(\frac{60^\circ+x+60^\circ-x}{2}\right)\cos\left(\frac{60^\circ+x-60^\circ+x}{2}\right)-\cos 3x-\cos 3x\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left[3\cos x+\cos 3x+6\cos x\cos 60^\circ-\cos 3x-\cos 3x\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left[3\cos x+\cos 3x+6\cos x.\frac{1}{2}-\cos 3x-\cos 3x\right] \quad =\frac{1}{4}\left[6\cos x-\cos 3x\right]$$

উদাহরণ 12: যদি $\tan^2\theta=1+2\tan^2\phi$ হয়, তবে দেখান যে, $\cos 2\phi=1+2\cos 2\theta$

সমাধান: $\tan^2\theta=1+2\tan^2\phi \;\Rightarrow\; \tan^2\phi=\frac{1}{2}\left(\tan^2\theta-1\right)$

এখন $\cos 2\phi=\frac{1-\tan^2\phi}{1+\tan^2\phi}=\frac{1-\frac{1}{2}\left(\tan^2\theta-1\right)}{1+\frac{1}{2}\left(\tan^2\theta-1\right)}=\frac{2-\tan^2\theta+1}{2+\tan^2\theta-1}$

$$=\frac{\left(1+\tan^2\theta\right)+2\left(1-\tan^2\theta\right)}{1+\tan^2\theta}=1+2\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}=1+2\cos 2\theta$$

উদাহরণ 13: যদি $\cos A+\cos B+\cos C=0$ হয় তবে প্রমাণ করুন যে, $\cos 3A+\cos 3B+\cos 3C=12\cos A\cos B\cos C$

সমাধান: $\cos 3A+\cos 3B+\cos 3C=4\cos^3 A-3\cos A+4\cos^3 B-3\cos B+4\cos^3 C-3\cos C$

$=4\left(\cos^3 A+\cos^3 B+\cos^3 C\right)-3\left(\cos A+\cos B+\cos C\right)=4\left(\cos^3 A+\cos^3 B+\cos^3 C\right)$

$=4\left(\cos^3 A+\cos^3 B+\cos^3 C-3\cos A\cos B\cos C\right)+12\cos A\cos B\cos C$

$=4\{(\cos A+\cos B+\cos C)(\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C-\cos A\cos B-\cos B\cos C-\cos C\cos A)\}+12\cos A\cos B\cos C$

$=12\cos A\cos B\cos C$

উদাহরণ 14: যদি α ও β ধনাত্মক ও সূক্ষ্মকোণ এবং $\cos 2\alpha=\frac{3\cos 2\beta-1}{3-\cos 2\beta}$ হয় তবে দেখান যে,

$\tan\alpha=\pm\sqrt{2}\tan\beta$

সমাধান: $\tan\alpha=\sqrt{\tan^2\alpha}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}}=\pm\sqrt{\frac{1-\frac{3\cos 2\beta-1}{3-\cos 2\beta}}{1+\frac{3\cos 2\beta-1}{3-\cos 2\beta}}}=\pm\sqrt{\frac{3-\cos 2\beta-3\cos 2\beta+1}{3-\cos 2\beta+3\cos 2\beta-1}}$

$$=\pm\sqrt{\frac{4-4\cos 2\beta}{2+2\cos 2\beta}}=\pm\sqrt{\frac{4}{2}.\frac{1-\cos 2\beta}{1+\cos 2\beta}}=\pm\sqrt{2\tan^2\beta}=\pm\sqrt{2}\tan\beta$$

উদাহরণ 15: যদি $\tan\alpha=2\tan\beta$ হয় তবে দেখান যে, $\tan(\alpha+\beta)=\frac{3\sin 2\alpha}{1+3\cos 2\alpha}$

সমাধান: $\tan\alpha=2\tan\beta \;\Rightarrow\; \tan\beta=\frac{1}{2}\tan\alpha$

এখন $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\tan\alpha+\frac{1}{2}\tan\alpha}{1-\tan\alpha.\frac{1}{2}\tan\alpha}=\frac{\frac{3}{2}\tan\alpha}{1-\frac{1}{2}\tan^2\alpha}=\frac{3\tan\alpha}{2-\tan^2\alpha}$

$$= \frac{3\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{2-\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \frac{3\sin\alpha\cos\alpha}{2\cos^2\alpha-\sin^2\alpha} = \frac{3.2\sin\alpha\cos\alpha}{4\cos^2\alpha-2\sin^2\alpha} = \frac{3\sin 2\alpha}{4-4\sin^2\alpha-2\sin^2\alpha}$$

$$= \frac{3\sin 2\alpha}{4-6\sin^2\alpha} = \frac{3\sin 2\alpha}{1-3(1-2\sin^2\alpha)} = \frac{3\sin 2\alpha}{1+3\cos 2\alpha}$$

সারসংক্ষেপ

- কোন কোণকে একটি অখন্ড সংখ্যা দ্বারা গুণ করলে যে কোণ পাওয়া যায় তাকে মূল কোণের গুণিতক কোণ বলে। যেমন, $2A$, $3A$, $4A$ ইত্যাদি কোণ A কোণের গুণিতক কোণ।
- $2A$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

$$\sin 2A = 2\sin A\cos A,\quad \cos 2A = 1-2\sin^2 A = 2\cos^2 A-1,\quad 1-\cos 2A = 2\sin^2 A$$

$$1+\cos 2A = 2\cos^2 A,\quad \frac{1-\cos 2A}{1+\cos 2A} = \tan^2 A,\quad \tan 2A = \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A},$$

$$\cot 2A = \frac{\cot^2 A-1}{2\cot A},\quad \sin 2A = \frac{2\tan A}{1+\tan^2 A},\quad \cos 2A = \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$$

- $3A$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

$$\sin 3A = 3\sin A-4\sin^3 A,\quad \cos 3A = 4\cos^3 A-3\cos A,\quad \tan 3A = \frac{3\tan A-\tan^3 A}{1-3\tan^2 A}$$

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৮.৪

প্রমাণ করুন (1-23)

1. (i) $\frac{1+\cos 2\theta}{\sin 2\theta} = \cot\theta$ (ii) $\frac{1-\cos 2\theta}{\sin 2\theta} = \tan\theta$ (iii) $\frac{\sin 2\theta}{1+\cos 2\theta} = \tan\theta$
2. (i) $\tan A + \cot A = 2\operatorname{cosec} A$. (ii) $\cot A - \tan A = 2\cot 2A$.
3. (i) $\frac{2\sec 2\theta}{1+\sec 2\theta} = \sec^2\theta$ (ii) $\frac{\cos^2\theta+\sin^3\theta}{\cos\theta+\sin\theta} = 1-\frac{1}{2}\sin 2\theta$ (iii) $\frac{\tan^2\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)-1}{\tan^2\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)+1} = \sin 2\theta$
4. $\cos nA\cos(n+2)A - \cos^2(n+1)A + \sin^2 A = 0$
5. $\sin^2\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\theta}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{8}-\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta$
6. $\tan\theta(1+\sec 2\theta) = \tan 2\theta$
7. $\frac{\sin A+\cos A}{\cos A-\sin A} + \frac{\sin A-\cos A}{\cos A+\sin A} = 2\tan 2A$.
8. $\frac{\cos^2\theta+\sin^3\theta}{\cos\theta+\sin\theta} = 1-\frac{1}{2}\sin 2\theta$
9. $\sin 5\theta = 10\sin^5\theta - 20\sin^3\theta + 5\sin\theta$
10. $\frac{3\sin x-\sin 3x}{3\cos x+\cos 3x} = \tan^3 x$
11. (i) $\cos^6\theta - \sin^6\theta = \cos 2\theta\left(1-\frac{1}{4}\sin^2 2\theta\right)$ (ii) $\cos^6\theta+\sin^6\theta = \frac{1}{4}\left(1+3\cos^2 2\theta\right)$
12. $\tan 2A = (\sec 2A+1)\sqrt{\sec^2 A-1}$

13. (i) $\sin 8\theta = 8 \sin \theta \cos \theta \cos 2\theta \cos 4\theta.$
    (ii) $\sin^3 2\theta = 2^5 \sin \theta \cos \theta \cos 2\theta \cos 2^2 \theta \cos 2^3 \theta \cos 2^4 \theta.$
14. $\tan 3\theta - \tan 2\theta - \tan \theta = \tan 3\theta \tan 2\theta \tan \theta$
15. $\cos (120° - A) + \cos A + \cos (120° + A) = 0.$
16. $\dfrac{\cos (45° + A)}{\cos (45° - A)} = \sec 2A - \tan 2A.$
17. $\tan (45° + A) + \tan (45° - A) = 2 \sec 2A.$
18. $\tan A \tan (60° + A) \tan (120° + A) = -\tan 3A$
19. $\cos^2 (A - 120°) + \cos^2 A + \cos^2 (A + 120°) = \dfrac{3}{2}$
20. $\sin^3 x + \sin^3(120° + x) + \sin^3(240° + x) = -\dfrac{3}{4} \sin 3x.$
21. $\sec x = \dfrac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos 4x}}}$
22. (i) $\sin^2(\alpha + \beta) - \sin^2(\alpha - \beta) = \sin 2\alpha \sin 2\beta$
    (ii) $\cos^2(\alpha - \beta) - \sin^2(\alpha + \beta) = \cos 2\alpha \cos 2\beta$
23. $\tan \theta + 2 \tan 2\theta + 4 \tan 4\theta + 8 \tan 8\theta = \cot \theta.$
24. যদি $2\tan\alpha = 3\tan\beta$ হয় তবে দেখান যে $\tan(\alpha - \beta) = \dfrac{\sin 2\beta}{5 - \cos 2\beta}$
25. যদি $\cos\theta = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{1}{x}\right)$ হয় তবে দেখান যে,

    (i) $\cos 2\theta = \dfrac{1}{2}\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right)$ (ii) $\cos 3\theta = \dfrac{1}{2}\left(x^3 + \dfrac{1}{x^3}\right)$ (iii) $\cos 4\theta = \dfrac{1}{2}\left(x^4 + \dfrac{1}{x^4}\right)$
26. যদি $\dfrac{\tan(\alpha + \beta - \gamma)}{\tan(\alpha - \beta + \gamma)} = \dfrac{\tan\gamma}{\tan\beta}$ হয়, তবে দেখান যে, হয় $\sin(\beta - \gamma) = 0$ অথবা,
    $\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 0$
27. যদি $\tan\alpha = \dfrac{b}{a}$ হয় তবে দেখান যে,

    (i) $\sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}} + \sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}} = \dfrac{2\cos\alpha}{\sqrt{\cos 2\alpha}}$ (ii) $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}} + \sqrt{\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}} = \dfrac{2\sin^2\alpha}{\sqrt{\cos 2\alpha}}$
28. যদি $\tan\alpha = \dfrac{a}{b}$ হয় তবে দেখান যে, $\sin 4\alpha = \dfrac{4ab\left(b^2 - a^2\right)}{\left(b^2 + a^2\right)^2}$

পাঠ ৮.৫ উপ-গুণিতক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- উপ-গুণিতক কোণ-এর সংজ্ঞা বলতে পারবেন,
- উপ-গুণিতক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নির্ণয় করতে পারবেন,
- এতদসংক্রান্ত সমস্যার সমাধান করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	উপ-গুণিতক কোণ

মূলপাঠ

উপ-গুণিতক কোণ

$\frac{A}{2}, \frac{A}{3}, \frac{A}{4}$ ইত্যাদি কোণকে A কোণের উপ-গুণিতক কোণ বলে। এই পাঠে $\frac{A}{2}, \frac{A}{3}$ প্রভৃতি উপ-গুণিতক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতকে মূল কোণ A এর ত্রিকোণমিতিক অনুপাতে প্রকাশ করা হবে।

θ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতকে $\frac{\theta}{2}$ এবং $\frac{\theta}{3}$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতে প্রকাশ

আমরা জানি, $\sin 2A = 2\sin A\cos A$

$$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 2\cos^2 A - 1 = 1 - 2\sin^2 A$$

$$1 + \cos 2A = 2\cos^2 A; \qquad 1 - \cos 2A = 2\sin^2 A$$

$$\tan 2A = \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}; \qquad \sin 2A = \frac{2\tan A}{1+\tan^2 A}; \qquad \cos 2A = \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$$

উপরের সূত্রগুলোতে A এর পরিবর্তে $\frac{\theta}{2}$ বসালে পাওয়া যায়-

$$\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$\cos\theta = \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2} = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1 = 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$1+\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2}; \qquad 1-\cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$\tan\theta = \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}; \qquad \sin\theta = \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}; \qquad \cos\theta = \frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$$

আবার, $\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$; $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$ এবং $\tan 3A = \frac{3\tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A}$

উপরের সূত্র তিনটিতে A এর পরিবর্তে $\frac{\theta}{3}$ বসালে পাওয়া যায়,

$$\sin\theta = 3\sin\frac{\theta}{3} - 4\sin^3\frac{\theta}{3}; \quad \cos\theta = 4\cos^3\frac{\theta}{3} - 3\cos\frac{\theta}{3} \text{ এবং } \tan\theta = \frac{3\tan\frac{\theta}{3} - \tan^3\frac{\theta}{3}}{1 - 3\tan^2\frac{\theta}{3}}$$

$\sin\frac{\theta}{2}$, $\cos\frac{\theta}{2}$ এবং $\tan\frac{\theta}{2}$ অনুপাতসমূহকে $\cos\theta$ অনুপাতে প্রকাশ

আমরা জানি, $2\sin^2\frac{\theta}{2} = 1 - \cos\theta$ - - - - - - - - - - - - - - - (i)

এবং $2\cos^2\frac{\theta}{2} = 1 + \cos\theta$ - - - - - - - - - - - - - - - (ii)

(i) ও (ii) নং থেকে পাওয়া যায়,

$$\sin\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos\theta)},\quad \cos\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos\theta)},\quad \tan\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$$

চিহ্নের দ্ব্যর্থতার ব্যাখ্যা: ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের কোন নির্দিষ্ট মানের জন্য কোণের একাধিক মান পাওয়া যায়। ফলে, $\frac{\theta}{2}$ এর একাধিক মান হতে পারে এবং $\frac{\theta}{2}$ কোণটি চারটি চতুর্ভাগের যেকোনোটিতে অবস্থিত হতে পারে। $\sin\frac{\theta}{2}$ এবং $\cos\frac{\theta}{2}$ এর চিহ্ন ধনাত্মক না ঋণাত্মক হবে তা চতুর্ভাগগুলোতে $\frac{\theta}{2}$ এর অবস্থানের উপর নির্ভর করে। অতএব, θ কোণের মান দেয়া থাকলে, $\frac{\theta}{2}$ কোন্ চতুর্ভাগে অবস্থান করবে তা নির্ণয় করা যাবে এবং তখন $\sin\frac{\theta}{2}$ এবং $\cos\frac{\theta}{2}$ এর সঠিক চিহ্ন নির্ণয় করা সম্ভব হবে। নিচের উদাহরণ থেকে বিষয়টি পরিষ্কার বুঝা যাবে।

উদাহরণ 1: $\sin 22\frac{1}{2}^{\circ}$ ও $\cos 22\frac{1}{2}^{\circ}$ এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান: এখানে $\frac{\theta}{2}=22\frac{1}{2}^{\circ}$ ধনত্মক ও সূক্ষ্মকোণ জন্য সাইন (sine) এবং কোসাইন (cosine) উভয়ই ধনাত্মক।

অতএব, $\sin 22\frac{1}{2}^{\circ} = +\sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos 45^{\circ})} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}}\right)}$

$= \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{(\sqrt{2}-1)}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$

আবার $\cos 22\frac{1}{2}^{\circ} = +\sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos 45^{\circ})} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}\right)}$

$= \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{(\sqrt{2}+1)}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$

$\sin\frac{\theta}{2}$, $\cos\frac{\theta}{2}$ অনুপাতসমূহকে $\sin\theta$ অনুপাতে প্রকাশ

আমরা জানি, $\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$ এবং $\cos^2\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2}=1$

তাহলে, $1+\sin\theta=\cos^2\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2}+2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=\left(\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}\right)^2$

এবং $1-\sin\theta=\cos^2\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2}-2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=\left(\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}\right)^2$

অতএব, $\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{1+\sin\theta}$ ----------- (iii)

$\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{1-\sin\theta}$ ----------- (iv)

(iii) ও (iv) যোগ করে পাওয়া যায়, $\cos\frac{\theta}{2}=\pm\frac{1}{2}\sqrt{1+\sin\theta}\pm\frac{1}{2}\sqrt{1-\sin\theta}$

এবং (iii) হতে (iv) বিয়োগ করে পাওয়া যায়, $\sin\frac{\theta}{2}=\pm\frac{1}{2}\sqrt{1+\sin\theta}\mp\frac{1}{2}\sqrt{1-\sin\theta}$

চিহ্নের দ্ব্যর্থতার ব্যাখ্যা: $\sin\theta$-এর কোন নির্দিষ্ট মানের জন্য θ কোণের একাধিক মান হতে পারে। অতএব, $\frac{\theta}{2}$ চতুর্ভাগগুলোর যেকোনোটিতে অবস্থিত হতে পারে। θএর মান জানা থাকলে $\sin\frac{\theta}{2}$ ও $\cos\frac{\theta}{2}$ এর মান নির্ণয় করে $\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}$ এবং $\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}$ এর সঠিক চিহ্ন নির্ণয় করা যাবে।

অথবা, $\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)$এবং $\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)$

θ-এর মান জানা থাকলে, উপরের অভেদ দুটিতে θ -এর মান স্থাপন করে $\cos\frac{\theta}{2}$ এবং $\sin\frac{\theta}{2}$ অনুপাত দুটির সঠিক চিহ্নসহ মান নির্ণয় করা সহজ হয়।

উদাহরণ 2: $\sin 15^\circ$ ও $\cos 15^\circ$ এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান: $\cos 15^\circ+\sin 15^\circ=+\sqrt{1+\sin 30^\circ}=\sqrt{1+\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{3}{2}}$ ----------------- (v)

$\cos 15^\circ-\sin 15^\circ=+\sqrt{1-\sin 30^\circ}=\sqrt{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ ----------------(vi)

$\therefore$ (v) এবং (vi) যোগ করে পাই $\cos 15^\circ=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

এবং (v) হতে (vi) বিয়োগ করে পাই, $\sin 15^\circ=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

উদাহরণ 3: $\sin 75^\circ$ এবং $\cos 75^\circ$ এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান: $\cos 75^\circ+\sin 75^\circ=+\sqrt{1+\sin 150^\circ}=\sqrt{1+\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{3}{2}}$

[$\because$ $\cos 75^\circ+\sin 75^\circ=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+75^\circ\right)$ = ধনাত্মক]

$\cos 75^\circ-\sin 75^\circ=-\sqrt{1-\sin 150^\circ}=-\sqrt{1-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

[$\because$ $\cos 75^\circ-\sin 75^\circ=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-75^\circ\right)$ = ঋণাত্মক]

এখন যোগ ও বিয়োগ করলে যথাক্রমে পাওয়া যায়-

$\cos 75^\circ=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ এবং $\sin 75^\circ=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

$\tan\frac{\theta}{2}$ অনুপাতের মান $\tan\theta$ অনুপাতে প্রকাশ

আমরা জানি, $\tan\theta=\dfrac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}$ অর্থাৎ, $\tan\theta\tan^2\frac{\theta}{2}+2\tan\frac{\theta}{2}-\tan\theta=0$

$$\therefore \tan\frac{\theta}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{4+4\tan^2\theta}}{2\tan\theta}=\frac{-1\pm\sqrt{1+\tan^2\theta}}{\tan\theta}$$

$\tan\frac{\theta}{2}$ -এর মান ধনাত্মক না ঋণাত্মক হবে তা θ-এর মানের উপর নির্ভর করবে এবং θ দেয়া হলে সঠিক চিহ্নসহ $\tan\frac{\theta}{2}$ এর মান নির্ণয় করা যাবে।

18° ও 36° কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

মনে করুন, $\theta = 18°$, তাহলে, $5\theta = 90°$ $\therefore\ 2\theta = (5\theta - 3\theta) = 90° - 3\theta$

সুতরাং, $\sin 2\theta = \sin(90° - 3\theta) \Rightarrow \sin 2\theta = \cos 3\theta \Rightarrow 2\sin\theta\cos\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

যেহেতু $\cos\theta$ অর্থাৎ $\cos 18°$-এর মান শূন্য নয়, অতএব, উভয় পক্ষকে $\cos\theta$ দ্বারা ভাগ করে,

$2\sin\theta = 4\cos^2\theta - 3 \Rightarrow 2\sin\theta = 4(1-\sin^2\theta) - 3 \Rightarrow 4\sin^2\theta + 2\sin\theta - 1 = 0$

$\therefore\ \sin\theta = \frac{-2\pm\sqrt{4+16}}{8} = \frac{\pm\sqrt{5}-1}{4}$

যেহেতু θ অর্থাৎ, $18°$ ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ অতএব, $\sin\theta$ এর মান ধনাত্মক।

$\therefore\ \sin 18° = \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$

$\cos 18° = \sqrt{1-\sin^2 18°} = \sqrt{1 - \frac{1}{16}(\sqrt{5}-1)^2} = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$

$\cos 36° = 1 - 2\sin^2 18° = 1 - 2.\frac{1}{16}(\sqrt{5}-1)^2 = \frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$

$\sin 36° = \sqrt{1-\cos^2 36°} = \sqrt{1 - \frac{1}{16}(\sqrt{5}+1)^2} = \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$

দ্রষ্টব্যঃ যেহেতু $54°$ এবং $72°$ কোণগুলো যথাক্রমে $36°$ এবং $18°$ কোণগুলোর পরিপূরক, অতএব $54°$ ও $72°$ কোণ দুটির ত্রিকোণমিতিক অনুপাত সহজেই নির্ণয় করা যায়।

যেমন $\sin 54° = \sin(90° - 36°) = \cos 36° = \frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$ ।

$\cos 72° = \cos(90° - 18°) = \sin 18° = \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$

3° এবং এর গুণিতক কোণগুলোর ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

$\sin 3° = \sin(18° - 15°) = \sin 18°\cos 15° - \cos 18°\sin 15°$

$= \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\right)$

$= \frac{1}{16}(\sqrt{5}-1)(\sqrt{6}+\sqrt{2}) - \frac{1}{8}\sqrt{5+\sqrt{5}}\ (\sqrt{3}-1)$

অনুরূপভাবে, $\cos 3° = \frac{1}{8}(\sqrt{3}+1)\sqrt{5+\sqrt{5}} + \frac{1}{16}(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{5}-1)$

$3°$, $15°$, $30°$, $36°$ এবং $45°$ কোণগুলোর ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মান থেকে $3°$-এর গুণিতক কোণগুলোর ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নিণয় করা যায়। [উদাহরণস্বরূপ, $6° = 36° - 30°$, $9° = 45° - 36°$·, $12° = 30° - 18°$, $21° = 36° - 15°$ ইত্যাদি] $45°$ এর চেয়ে বড় $3°$-এর গুণিতক কোণগুলোর জন্য "পরিপূরক কোণের sin এবং cosine সমান" এ সূত্রটি প্রয়োগ করা যায়।

উদাহরণ 4: প্রমাণ করুন $\tan\frac{\theta}{2} + \cot\frac{\theta}{2} = 2\operatorname{cosec}\theta$

সমাধানঃ $\tan\frac{\theta}{2} + \cot\frac{\theta}{2} = \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}} + \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} = \frac{\sin^2\frac{\theta}{2} + \cos^2\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}}$

$$=\frac{1}{\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}}=\frac{2}{2\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}}=\frac{2}{\sin\theta}=2\operatorname{cosec}\theta$$

উদাহরণ 5: প্রমাণ করুন $\cos^4\frac{1}{2}A+\sin^4\frac{1}{2}A=\frac{1}{4}(3+\cos 2A)$

সমাধানঃ $\cos^4\frac{1}{2}A+\sin^4\frac{1}{2}A=\left(\cos^2\frac{1}{2}A+\sin^2\frac{1}{2}A\right)^2-2\sin^2\frac{1}{2}A\cos^2\frac{1}{2}A$

$$=1-\frac{1}{2}\left(2\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}A\right)^2=1-\frac{1}{2}\sin 2A=1-\frac{1}{4}.2\sin 2A.$$

$$=1-\frac{1}{4}(1-\cos 2A)=1-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cos 2A=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 2A=\frac{1}{4}(3+\cos 2A)$$

উদাহরণ 6: প্রমাণ করুন $\frac{1+\sin\alpha+\cos\alpha}{1+\sin\alpha-\cos\alpha}=\cot\frac{\alpha}{2}$

সমাধানঃ $\frac{1+\sin\alpha+\cos\alpha}{1+\sin\alpha-\cos\alpha}=\frac{1+\cos\alpha+\sin\alpha}{1-\cos\alpha+\sin\alpha}$

$$=\frac{2\cos^2\frac{\alpha}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\right)}{2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\right)}=\cot\frac{\alpha}{2}$$

উদাহরণ 7: প্রমাণ করুন $(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2=4\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}$

সমাধানঃ $(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2$

$$=(\cos^2\alpha+\cos^2\beta-2\cos\alpha\cos\beta)+(\sin^2\alpha+\sin^2\beta-2\sin\alpha\sin\beta)$$

$$=(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)+(\cos^2\beta+\sin^2\beta)-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)$$

$$=1+1-2\cos(\alpha-\beta)=2\{1-\cos(\alpha-\beta)\}=2.2\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}=4\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}$$

উদাহরণ 8: প্রমাণ করুন $\tan 6^\circ\tan 42^\circ\tan 66^\circ\tan 78^\circ=1$

সমাধানঃ $\tan 6^\circ\tan 42^\circ\tan 66^\circ\tan 78^\circ=\frac{\sin 6^\circ}{\cos 6^\circ}.\frac{\sin 42^\circ}{\cos 42^\circ}.\frac{\sin 66^\circ}{\cos 66^\circ}.\frac{\sin 78^\circ}{\cos 78^\circ}$

$$=\frac{2\sin 6^\circ\sin 66^\circ\ 2\sin 42^\circ\sin 78^\circ}{2\cos 6^\circ\cos 66^\circ\ 2\cos 42^\circ\cos 78^\circ}=\frac{(\cos 60^\circ-\cos 72^\circ)(\cos 36^\circ-\cos 120^\circ)}{(\cos 60^\circ+\cos 72^\circ)(\cos 36^\circ+\cos 120^\circ)}$$

$$=\frac{\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)\right\}\left\{\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)+\frac{1}{2}\right\}}{\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)\right\}\left\{\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)-\frac{1}{2}\right\}}=\frac{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)}=\frac{9-5}{5-1}=\frac{4}{4}=1$$

উদাহরণ 9: প্রমাণ করুন $\sin x=2^5\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^3}\cos\frac{x}{2^4}\cos\frac{x}{2^5}\sin\frac{x}{2^5}$

সমাধানঃ $\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=2.2\sin\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^2}.\cos\frac{x}{2}$

$$=2^2.2\sin\frac{x}{2^3}\cos\frac{x}{2^3}.\cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2}=2^3.2\sin\frac{x}{2^4}\cos\frac{x}{2^4}\cos\frac{x}{2^3}\cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2}$$

$$= 2^4.\ 2\sin\frac{x}{2^5}\ \cos\frac{x}{2^5}\ \cos\frac{x}{2^4}\ \cos\frac{x}{2^3}\ \cos\frac{x}{2^2}\ \cos\frac{x}{2}$$

$$= 2^5\cos\frac{x}{2}\ \cos\frac{x}{2^2}\ \cos\frac{x}{2^3}\ \cos\frac{x}{2^4}\ \cos\frac{x}{2^5}\ \sin\frac{x}{2^5}$$

উদাহরণ 10: প্রমাণ করুন $2\sin\frac{\pi}{16} = 2\sin 11°45' = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

সমাধান ঃ আমরা জানি, $2\cos^2\frac{1}{2}\ A = 1+\cos A$

$$\therefore\ 2\cos^2 22°30' = 1+\cos45° = 1+\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}} = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$$

অর্থাৎ $\cos^2 22°30' = \frac{2+\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \cos22°30' = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

সুতরাং $2\sin^2 11°15' = 1-\cos22°30' = 1-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} = \frac{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

অতএব, $4\sin^2 11°15' = 2-\sqrt{2+\sqrt{2}}$

$\therefore\ 2\sin11°15' = 2\sin\frac{\pi}{16} = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

উদাহরণ 11: যদি $x = \sin\frac{\pi}{18}$ হয় তবে দেখান যে, $8x^4+4x^3-6x^2-2x+\frac{1}{2} = 0$

সমাধানঃ $\sin3.\frac{\pi}{18} = 3\sin\frac{\pi}{18} - 4\sin^3\frac{\pi}{18} \Rightarrow \sin\frac{\pi}{6} = 3\sin\frac{\pi}{18} - 4\sin^3\frac{\pi}{18}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = 3x - 4x^3 \quad \Rightarrow 4x^3 - 3x + \frac{1}{2} = 0$$

এখন $8x^4+4x^3-6x^2-2x+\frac{1}{2} = 2x(4x^3-3x+\frac{1}{2}) + (4x^3-3x+\frac{1}{2}) = 2x\times 0 + 0 = 0$

উদাহরণ 12: যদি $\sin\alpha+\sin\beta = a$ এবং $\cos\alpha+\cos\beta = b$ হয়, তবে দেখান যে,

$$\tan\frac{1}{2}(\alpha-\beta) = \pm\sqrt{\frac{4-a^2-b^2}{a^2+b^2}}$$

সমাধানঃ $\sin\alpha+\sin\beta = a \Rightarrow (\sin\alpha+\sin\beta)^2 = a^2$

আবার, $\cos\alpha+\cos\beta = b \Rightarrow (\cos\alpha+\cos\beta)^2 = b^2$

অতএব, $(\sin\alpha+\sin\beta)^2 + (\cos\alpha+\cos\beta)^2 = a^2+b^2$

$$\Rightarrow (\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)+(\sin^2\beta+\cos^2\beta)+2(\sin\alpha\sin\beta\cos\alpha\cos\beta) = a^2+b^2$$

$$\Rightarrow 1+1+2\cos(\alpha-\beta) = a^2+b^2 \quad \Rightarrow 2\{1+\cos(\alpha-\beta)\} = a^2+b^2 \quad \Rightarrow 2.2\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2} = a^2+b^2$$

$$\Rightarrow \cos^2\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{a^2+b^2}{4} \qquad \Rightarrow \sec^2\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{4}{a^2+b^2} \quad \Rightarrow 1+\tan^2\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{4}{a^2+b^2}$$

$$\Rightarrow \tan^2\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{4}{a^2+b^2}-1 \quad \Rightarrow \tan^2\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{4-a^2-b^2}{a^2+b^2} \quad \Rightarrow \tan\frac{1}{2}(\alpha-\beta) = \pm\sqrt{\frac{4-a^2-b^2}{a^2+b^2}}$$

উদাহরণ 13: যদি $a\sin\theta+b\sin\phi = c$ এবং $a\cos\theta+b\cos\phi = c$ হয় তবে দেখান যে,

$$\cos\frac{1}{2}(\theta-\phi)=\pm\sqrt{\frac{2c^2-(a-b)^2}{4ab}}$$

সমাধান: $a\sin\theta+b\sin\phi=c\Rightarrow a^2\sin^2\theta+b^2\sin^2\phi+2ab\sin\theta\sin\phi=c^2$........(1)

আবার, $a\cos\theta+b\cos\phi=c\Rightarrow a^2\cos^2\theta+b^2\cos^2\phi+2ab\cos\theta\cos\phi=c^2$........(2)

(1) ও (2) যোগ করে

$$a^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)+b^2(\sin^2\phi+\cos^2\phi)+2ab(\cos\theta\cos\phi+\sin\theta\sin\phi)=2c^2$$

$$\Rightarrow a^2+b^2+2ab\cos(\theta-\phi)=2c^2 \quad \Rightarrow 2ab\cos(\theta-\phi)=2c^2-a^2-b^2$$

$$\Rightarrow\cos(\theta-\phi)=\frac{2c^2-a^2-b^2}{2ab}$$

এখন $\cos^2\frac{1}{2}(\theta-\phi)=\frac{1}{2}\{1+\cos(\theta-\phi)\}=\frac{1}{2}\left\{1+\frac{2c^2-a^2-b^2}{2ab}\right\}=\frac{1}{2}\left\{\frac{2ab+2c^2-a^2-b^2}{2ab}\right\}$

$$=\frac{2c^2-(a^2-2ab+b^2)}{4ab}=\frac{2c^2-(a-b)^2}{4ab}$$

$$\therefore\cos\frac{1}{2}(\theta-\phi)=\pm\sqrt{\frac{2c^2-(a-b)^2}{4ab}}$$

উদাহরণ 14: যদি $\sin\theta=\frac{a-b}{a+b}$ হয় তবে প্রমাণ করুন যে, $\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{b}{a}}$

সমাধান: $\sin\theta=\frac{a-b}{a+b}\Rightarrow\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}=\frac{a+b-a+b}{a+b+a-b}$ [যোজন- বিয়োজন করে]

$$\Rightarrow\frac{\cos^2\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2}-2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2}+2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}=\frac{2b}{2a}\quad\Rightarrow\frac{\left(\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}\right)^2}{\left(\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}\right)^2}=\frac{b}{a}\quad\Rightarrow\frac{\cos^2\frac{\theta}{2}\left(1-\tan\frac{\theta}{2}\right)^2}{\cos^2\frac{\theta}{2}\left(1+\tan\frac{\theta}{2}\right)^2}=\frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow\left(\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\theta}{2}}\right)^2=\frac{b}{a}\quad\Rightarrow\tan^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)=\frac{b}{a}\quad\Rightarrow\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{b}{a}}$$

সারসংক্ষেপ

- $\frac{A}{2},\frac{A}{3},\frac{A}{4}$ ইত্যাদি কোণকে A কোণের উপ-গুণিতক কোণ বলে।
- θ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতকে $\frac{\theta}{2}$ এবং $\frac{\theta}{3}$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতে প্রকাশ

$$\sin\theta=2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2},\quad\cos\theta=\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}=2\cos^2\frac{\theta}{2}-1=1-2\sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$1+\cos\theta=2\cos^2\frac{\theta}{2},\quad 1-\cos\theta=2\sin^2\frac{\theta}{2},\quad\tan\theta=\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}},\quad\sin\theta=\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$$

$$\cos\theta = \frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}},\quad \sin\theta = 3\sin\frac{\theta}{3} - 4\sin^3\frac{\theta}{3},\quad \cos\theta = 4\cos^3\frac{\theta}{3} - 3\cos\frac{\theta}{3}$$

$$\tan\theta = \frac{3\tan\frac{\theta}{3} - \tan^3\frac{\theta}{3}}{1-3\tan^2\frac{\theta}{3}}$$

- $\sin\frac{\theta}{2}$, $\cos\frac{\theta}{2}$ এবং $\tan\frac{\theta}{2}$ অনুপাতসমূহকে $\cos\theta$ অনুপাতে প্রকাশ

$$\sin\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos\theta)},\quad \cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos\theta)},\quad \tan\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$$

- $\sin\frac{\theta}{2}$, $\cos\frac{\theta}{2}$ অনুপাতসমূহকে $\sin\theta$ অনুপাতে প্রকাশ

$$\cos\frac{\theta}{2} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{1+\sin\theta} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1-\sin\theta},\quad \sin\frac{\theta}{2} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{1+\sin\theta} \mp \frac{1}{2}\sqrt{1-\sin\theta}$$

- $\tan\frac{\theta}{2}$ অনুপাতের মান $\tan\theta$ অনুপাতে প্রকাশ

$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{-1\pm\sqrt{1+\tan^2\theta}}{\tan\theta}$$

- চিহ্নের দ্ব্যর্থতার ব্যাখ্যা: $\frac{\theta}{2}$ কোণটি কোন্ চতুর্ভাগে অবস্থিত, জানা থাকলে $\sin\frac{\theta}{2}$ এবং $\cos\frac{\theta}{2}$ এর সঠিক চিহ্ন নির্ণয় করা সম্ভব হয়।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৮.৫

প্রমাণ করুন (1-11)

1. (i) $\left(\sin\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2}\right)^2 = 1+\sin\theta$ (ii) $\left(\sin\frac{\theta}{2} - \cos\frac{\theta}{2}\right)^2 = 1-\sin\theta$

   (iii) $\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \tan\frac{\theta}{2}$ (iv) $\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta} = \tan\frac{\theta}{2}$

2. $\frac{2\cos\theta - \cos2\theta - 1}{2\cos\theta + \cos2\theta + 1} = \tan^2\frac{\theta}{2}$

3. (i) $\frac{1-\tan\frac{1}{2}A}{1+\tan\frac{1}{2}A} = \frac{\cos A}{1+\sin A}$ (ii) $\frac{1+\tan\frac{1}{2}A}{1-\tan\frac{1}{2}A} = \frac{1+\sin A}{\cos A}$

4. $\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha} = \tan^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$

5. $\frac{\sin\frac{\theta}{2} - \sqrt{1+\sin\theta}}{\cos\frac{\theta}{2} - \sqrt{1+\sin\theta}} = \cot\frac{\theta}{2}$

6. $\dfrac{1+\cos\alpha\cos\beta-\cos\alpha-\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}=\tan\dfrac{\alpha}{2}\tan\dfrac{\beta}{2}$

7. $\dfrac{\sin 2\theta}{1+\cos 2\theta}.\dfrac{\cos\theta}{1+\cos\theta}=\tan\dfrac{\theta}{2}$

8. (i) $(\cos\alpha+\cos\beta)^2+(\sin\alpha+\sin\beta)^2=4\cos^2\dfrac{1}{2}(\alpha-\beta)$

(ii) $(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2=4\sin^2\dfrac{1}{2}(\alpha-\beta)$

(iii) $(\cos\alpha+\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2=4\cos^2\dfrac{1}{2}(\alpha+\beta)$

9. (i) $\cos^2\dfrac{\alpha}{2}+\cos^2\left(\dfrac{\alpha}{2}+60^\circ\right)+\cos^2\left(\dfrac{\alpha}{2}-60^\circ\right)=\dfrac{3}{2}$

(ii) $\sin^2\dfrac{\alpha}{2}+\sin^2\left(\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{\pi}{3}\right)+\sin^2\left(\dfrac{\alpha}{2}-\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{3}{2}$

10. (i) $2\cos\dfrac{\pi}{16}=2\cos 11^\circ 15'=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

(ii) $\cos 7\dfrac{1}{2}^\circ=\dfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}$

(iii) $\sin 67\dfrac{1}{2}^\circ=\dfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$

(iv) $\sin 292\dfrac{1}{2}^\circ=-\dfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$

11. (i) $\tan 7\dfrac{1}{2}^\circ=\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-2$

(ii) $\tan 82\dfrac{1}{2}^\circ=\sqrt{6}+\sqrt{3}+\sqrt{2}+2$

(iii) $\cot 142\dfrac{1}{2}^\circ=\sqrt{2}+\sqrt{3}-2-\sqrt{6}$

12. যদি $\tan\dfrac{\theta}{2}=\sqrt{\dfrac{1-e}{1+e}}\tan\dfrac{\phi}{2}$ হয় তবে দেখান যে, $\cos\phi=\dfrac{\cos\theta-e}{1-e\cos\theta}$

13. (i)যদি $\sin\alpha+\sin\beta=a$ এবং $\cos\alpha+\cos\beta=b$ হয় তবে প্রমাণ করুন যে, $\cos(\alpha+\beta)=\dfrac{b^2-a^2}{b^2+a^2}$

(ii) যদি $\sin\alpha-\sin\beta=a$ এবং $\cos\alpha+\cos\beta=b$ হয় তবে, দেখান যে $\cos(\alpha-\beta)=\dfrac{b^2-a^2}{b^2+a^2}$

14. যদি $a\sin\theta+b\sin\phi=c$ এবং $a\cos\theta+b\cos\phi=c$ হয়, তবে দেখান যে,

$\sin\dfrac{1}{2}(\theta-\phi)=\pm\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{(a-b)^2-2c^2}{ab}}$

15. যদি $\tan\dfrac{1}{2}\theta=\tan^3\dfrac{1}{2}\phi$ এবং $\tan\phi=2\tan\alpha$ হয় তবে দেখান যে, $\theta+\phi=2\alpha$.

16. $x=\tan\dfrac{\pi}{12}$ হলে দেখান যে, $x^3-3x^2-3x+1=0$

17. দেখান যে, $\sin x=2^n\cos\dfrac{x}{2}.\cos\dfrac{x}{2^2}.\cos\dfrac{x}{2^3}............\cos\dfrac{x}{2^n}.\sin\dfrac{x}{2^n}$

পাঠ ৮.৬ ত্রিকোণমিতিক অভেদাবলী

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- ত্রিকোণমিতিক অভেদাবলী সম্পর্কিত সমস্যার সমাধান নির্ণয় করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	ত্রিকোণমিতি, অভেদাবলী, সম্পুরক বা পরিপূরক কোণের ধর্ম

মূলপাঠ

ত্রিকোণমিতিক অভেদাবলী (Trigonometrical Identities)

তিন বা ততোধিক কোণ পরস্পর সম্পর্কযুক্ত হলে ঐ কোণসমূহের বা তাদের গুণিতক বা উপগুণিতক কোণে ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মধ্যে যে সম্পর্ক তার সাহায্যে ত্রিকোণমিতিক অভেদাবলী প্রতিষ্ঠা করা যায়। যখন তিনটি কোণের সমষ্টি $180°$ বা $90°$ হয়, তখনই জটিল অভেদাবলীর মধ্যে অতিপ্রয়োজনীয় অভেদাবলী নির্ণয় করা সহজতর হয়। তিনটি কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ হলে, সম্পুরক বা পরিপূরক কোণের ধর্ম ব্যবহার করতে হয়।

যদি $A + B + C = \pi$ হয় তবে $B + C = \pi - A$.

$\therefore \sin(B + C) = \sin(\pi - A) = \sin A$

$\cos(B + C) = \cos(\pi - A) = -\cos A$

$\tan(B + C) = \tan(\pi - A) = -\tan A$

অনুরূপভাবে $\sin(C + A) = \sin B$, $\sin(A + B) = \sin C$

$\cos(C + A) = -\cos B$, $\cos(A + B) = -\cos C$

$\tan(C + A) = -\tan A$, $\tan(A + B) = -\tan C$

আবার, $A + B + C = \pi$ হলে $\frac{1}{2}(B + C) = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}$

$$\therefore \sin\left(\frac{B+C}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right) = \cos\frac{A}{2}$$

$$\cos\left(\frac{B+C}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right) = \sin\frac{A}{2}$$

$$\tan\left(\frac{B+C}{2}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right) = \cot\frac{A}{2}$$

এই পাঠে যে সমস্ত অভেদাবলীর সত্যতা প্রমাণে একই ধরণের প্রক্রিয়া ব্যবহৃত হয়েছে তাদের একইভাবে সন্নিবেশ করে কয়েকটি ভাগে বিভক্ত করে তাদের উদাহরণ ও সমস্যা দেয়া হল।

প্রথম ভাগ: প্রথম ঘাত বিশিষ্ট sine বা cosine অনুপাত সম্বলিত অভেদাবলী নিম্নরূপে প্রতিষ্ঠা করা যায়

উদাহরণ 1: $A + B + C = \pi$ হলে প্রমাণ করুন $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -4\cos A\cos B\cos C - 1$

সমাধান: $(\cos 2A + \cos 2B) + \cos 2C = 2\cos(A + B)\cos(A - B) + 2\cos^2 C - 1$

$= 2\cos(\pi - C)\cos(A - B) + 2\cos^2 C - 1 \quad [\because A + B + C = \pi, \therefore A + B = \pi - C]$

$= -2\cos C\cos(A - B) + 2\cos^2 C - 1 = -2\cos C[\cos(A - B) - \cos C] - 1$

$= -2\cos C[\cos(A - B) - \cos\{\pi - (A + B)\}] - 1 \quad [\because A + B + C = \pi, \therefore C = \pi - (A + B)]$

$= -2\cos C[\cos(A - B) + \cos(A + B)] - 1$

$$= -2\cos C\left[2\cos\left(\frac{A-B+A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A+B-A+B}{2}\right)\right]-1$$
$$= -2\cos C\ 2\cos A\ \cos B\ -1 = -4\ \cos A\ \cos B\ \cos C\ -1$$

উদাহরণ 2: $A+B+C=\pi$ হলে প্রমাণ করুন $\sin 2A-\sin 2B+\sin 2C=4\cos A\ \sin B\ \cos C$

সমাধান: $\sin 2A-\sin 2B+\sin 2C$

$$=(\sin 2A-\sin 2B)+\sin 2C=2\cos(A+B)\ \sin(A-B)+2\sin C\ \cos C$$
$$=2\cos(\pi-C)\ \sin(A-B)+2\sin C\ \cos C \qquad [\because A+B+C=\pi,\ \therefore A+B=\pi-C\ ]$$
$$= -2\cos C\ \sin\ (A-B)+2\sin C\ \cos C=2\cos C\ [\ \sin C-\sin(A-B)\ ]$$
$$=2\cos C\ [\ \sin\ \{\pi-(A+B)-\sin(A-B)]\qquad [\because A+B+C=\pi,\ \therefore C=\pi-(A+B)\ ]$$
$$=2\cos\ [\ \sin\ (A+B)\ -\ \sin\ (A-B)\ ]$$
$$=2\cos C\left[2\cos\left(\frac{A+B+A-B}{2}\right)\sin\left(\frac{A+B-A+B}{2}\right)\right]$$
$$=2\cos C.2\cos A\sin B=4\cos A\sin B\cos C$$

উদাহরণ 3: $A+B+C=\pi$ হলে প্রমাণ করুন $\cos A-\cos B+\cos C+1=4\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

সমাধান: $A+B+C=\pi\ \Rightarrow\ \frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}=\frac{\pi}{2}\ \Rightarrow\ \frac{A}{2}+\frac{C}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{B}{2}$

এখন $\cos A-\cos B+\cos C+1$

$$=(\cos A+\cos C)+(1-\cos B)\ =2\cos\left(\frac{A+C}{2}\right)\cos\left(\frac{A-C}{2}\right)+2\sin^2\frac{B}{2}$$
$$=2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-C}{2}\right)+2\sin^2\frac{B}{2}\ =2\sin\frac{B}{2}\cos\left(\frac{A-C}{2}\right)+2\sin^2\frac{B}{2}$$
$$=2\sin\frac{B}{2}\left[\cos\left(\frac{A-C}{2}\right)+\sin\frac{B}{2}\right]$$
$$=2\sin\frac{B}{2}\left[\cos\left(\frac{A-C}{2}\right)+\sin\left\{\frac{\pi}{2}-\left(\frac{A+C}{2}\right)\right\}\right]\qquad\left[\because\frac{B}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{A+C}{2}\right]$$
$$=2\sin\frac{B}{2}\left[\cos\left(\frac{A-C}{2}\right)+\cos\left(\frac{A+C}{2}\right)\right]$$
$$=2\sin\frac{B}{2}\left[2\cos\left(\frac{\frac{A}{2}-\frac{C}{2}+\frac{A}{2}+\frac{C}{2}}{2}\right)\cos\left(\frac{\frac{A}{2}-\frac{C}{2}-\frac{A}{2}-\frac{C}{2}}{2}\right)\right]$$
$$=2\sin\frac{B}{2}.2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}\ =4\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

শিক্ষার্থীর কাজ	$A+B+C=\pi$ হলে প্রমাণ করুন 1. $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$ 2. $\sin A+\sin B-\sin C=4\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

	3. $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4\sin A \sin B \sin C$ 4. $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$ 5. $\cos 4A + \cos 4B + \cos 4C = 4\cos 2A\cos 2B\cos 2C - 1$

দ্বিতীয় ভাগ: tangent বা cotangent অনুপাত সম্বলিত অভেদাবলী নিম্নরূপে প্রতিষ্ঠা করা যায়

উদাহরণ 4: $A + B + C = \pi$ হলে প্রমাণ করুন $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$

সমাধান: $A + B + C = \pi \quad \therefore B + C = \pi - A$

$\therefore \tan(B + C) = \tan(\pi - A) = -\tan A$

বা, $\dfrac{\tan B + \tan C}{1 - \tan B \tan C} = -\tan A$

বা, $\tan B + \tan C = -\tan A + \tan A \tan B \tan C$

$\therefore \tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$

উদাহরণ 5: $A+B+C = \pi$ হলে প্রমাণ করুন $\cot B \cot C + \cot C \cot A + \cot A \cot B = 1$

সমাধান: $A + B + C = \pi \quad \therefore A + B = \pi - C$

$\therefore \cot(A + B) = \cot(\pi - C)$

বা, $\dfrac{\cot A \cot B - 1}{\cot A + \cot B} = -\cot C$

বা, $\cot A \cot B - 1 = -\cot A \cot C - \cot B \cot C$

বা, $\cot B \cot C + \cot C \cot A + \cot A \cot B = 1.$

শিক্ষার্থীর কাজ	$A + B + C = \pi$ হলে প্রামণ করুন 1. $\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} = 1$ 2. $\tan 3A + \tan 3B + \tan 3C = \tan 3A \tan 3B \tan 3C$ 3. $\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2} = \cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$

তৃতীয় ভাগ: দ্বিঘাত বিশিষ্ট sine বা cosine অনুপাত সম্বলিত অভেদাবলী নিম্নরূপে প্রতিষ্ঠা করা যায়

উদাহরণ 6: $A + B + C = \pi$ হলে প্রমাণ করুন $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 + 2\cos A \cos B \cos C$

সমাধান: $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C$

$= \frac{1}{2}[2\sin^2 A + 2\sin^2 B] + \sin^2 C = \frac{1}{2}[1 - \cos 2A + 1 - \cos 2B] + 1 - \cos^2 C$

$= \frac{1}{2}[2 - (\cos 2A + \cos 2B)] + 1 - \cos^2 C = 1 - \frac{1}{2}(\cos 2A + \cos 2B) + 1 - \cos^2 C$

$= 2 - \frac{1}{2}[2\cos(A + B)\cos(A - B)] - \cos^2 C$

$= 2 - \cos(\pi - C)\cos(A - B) - \cos^2 C \quad [\because A + B + C = \pi, \because A + B = \pi - C]$

$= 2 + \cos C\cos(A - B) - \cos^2 C = 2 + \cos C[\cos(A - B) - \cos C]$

$= 2 + \cos C[\cos(A - B) - \cos\{\pi - (A + B)\}] = 2 + \cos C[\cos(A - B) + \cos(A + B)]$

$= 2 + \cos C . 2\cos A \cos B = 2 + 2\cos A \cos B \cos C$

উদাহরণ 7: $A + B + C = \pi$ হলে প্রমাণ করুন $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2\cos A \cos B \cos C$

সমাধান: $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C$

$= \frac{1}{2}\left(2\cos^2 A + 2\cos^2 B\right) + \cos^2 C = \frac{1}{2}\left(1 + \cos 2A + 1 + \cos 2B\right) + \cos^2 C$

$= \frac{1}{2}\left(2 + \cos 2A + \cos 2B\right) + \cos^2 C = 1 + \frac{1}{2}\left(\cos 2A + \cos 2B\right) + \cos^2 C$

$= 1 + \frac{1}{2}\ [2\cos(A + B)\cos(A - B)] + \cos^2 C$

$= 1 + \cos(\pi - C)\cos(A - B) + \cos^2 C\ \ [\because A + B + C = \pi,\ \therefore A + B = \pi - C\ ]$

$= 1 - \cos C\cos(A - B) + \cos^2 C = 1 - \cos C\ [\ \cos(A - B) - \cos C\ ]$

$= 1 - \cos C\ [\cos(A - B) - \cos\{\pi - (A + B)\}\ ]\quad [\because A + B + C = \pi,\ \therefore C = \pi - (A + B)\ ]$

$= 1 - \cos C\ [\cos(A - B) + \cos(A + B)\ ]$

$= 1 - \cos C\left[2\cos\left(\frac{A + B + A - B}{2}\right)\sin\left(\frac{A + B - A + B}{2}\right)\right]$

$= 1 - \cos C.2\cos A\cos B = 1 - 2\cos A\cos B\cos C$

উদাহরণ 8: $A + B + C = \pi$ হলে প্রমাণ করুন $\cos^2 A + \cos^2 B - \cos^2 C = 1 - 2\sin A\sin B\cos C$

সমাধান: $\cos^2 A + \cos^2 B - \cos^2 C$

$= \frac{1}{2}\left(2\cos^2 A + 2\cos^2 B\right) - \cos^2 C = \frac{1}{2}\ [1 + \cos 2A + 1 + \cos 2B\ ] - \cos^2 C$

$= \frac{1}{2}\ [\ 2 + \cos 2A + \cos 2B] - \cos^2 C = 1 + \frac{1}{2}\ [\ \cos 2A + \cos 2B\ ] - \cos^2 C$

$= 1 + \frac{1}{2}\ [2\cos(A + B)\cos(A - B)\ ] - \cos^2 C$

$= 1 + \cos(\pi - C)\cos(A - B) - \cos^2 C\qquad [\because A + B + C = \pi, \therefore A + B = \pi - C\ ]$

$= 1 - \cos C\cos(A - B) - \cos^2 C = 1 - \cos C\ [\cos(A - B) + \cos C\ ]$

$= 1 - \cos C\ [\cos(A - B) + \cos\{\pi - (A + B)\}] = 1 - \cos C\ [\cos(A - B) - \cos(A + B)\ ]$

$= 1 - \cos C\left[2\sin\left(\frac{A - B + A + B}{2}\right)\sin\left(\frac{A + B - A + B}{2}\right)\right]$

$= 1 - \cos C\ .2\sin A\sin B = 1 - 2\sin A\sin B\cos C$

শিক্ষার্থীর কাজ	**$A + B + C = \pi$ হলে প্রমাণ করুন** 1. $\sin^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{B}{2} + \sin^2\frac{C}{2} = 1 - 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$ 2. $\cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} + \cos^2\frac{C}{2} = 2 + 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$ 3. $\cos^2 2A + \cos^2 2B + \cos^2 2C = 1 + 2\cos 2A\cos 2B\cos 2C$.

উদাহরণ 9: $A + B + C = \frac{\pi}{2}$ হলে প্রমাণ করুন, $\cos^2 A + \cos^2 B - \cos^2 C = 2\cos A\cos B\sin C$

সমাধান: $\cos^2 A + \cos^2 B - \cos^2 C$

$= \frac{1}{2}\left(2\cos^2 A + 2\cos^2 B\right) - \cos^2 C = \frac{1}{2}\left(1 + \cos 2A + 1 + \cos 2B\right) - \cos^2 C$

$= \frac{1}{2}\left(2 + \cos 2A + \cos 2B\right) - \cos^2 C = 1 + \frac{1}{2}\left(\cos 2A + \cos 2B\right) - \cos^2 C$

$= \frac{1}{2}[2\cos(A+B)\cos(A-B)] + 1 - \cos^2 C$

$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - C\right)\cos(A-B) + \sin^2 C \quad [\because A+B+C = \frac{\pi}{2}, \ \therefore A+B = \frac{\pi}{2} - C]$

$= \sin C\cos(A-B) + \sin^2 C = \sin C[\cos(A-B) + \sin C]$

$= \sin C\left[\cos(A-B) + \sin\left\{\frac{\pi}{2} - (A+B)\right\}\right] \quad [\because A+B+C = \frac{\pi}{2}, \ \therefore C = \frac{\pi}{2} - (A+B)]$

$= \sin C[\cos(A-B) + \cos(A+B)]$

$= \sin C.2\cos A\cos B = 2\cos A\cos B\sin C$

সারসংক্ষেপ

- যখন তিনটি কোণের সমষ্টি 180° বা 90° হয়, তখনই জটিল অভেদাবলীর মধ্যে অতিপ্রয়োজনীয় অভেদাবলী নির্ণয় করা সহজতর হয়।
- তিনটি কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ হলে, সম্পুরক বা পরিপূরক কোণের ধর্ম ব্যবহার করতে হয়।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৮.৬

$A + B + C = \pi$ হলে, প্রমাণ করুন (1 - 4)

1. $\tan 2A + \tan 2B + \tan 2C = \tan 2A \tan 2B \tan 2C$
2. (i) $\cos A + \cos B - \cos C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} - 1$

   (ii) $\cos 2A - \cos 2B + \cos 2C = 1 - 4\sin A\cos B\sin C$
3. $\sin^2 A - \sin^2 B + \sin^2 C = 2\sin A\cos B\sin C$
4. (i) $\frac{\cos A}{\sin B\sin C} + \frac{\cos B}{\sin C\sin A} + \frac{\cos C}{\sin A\sin B} = 2$

   (ii) $\frac{\sin B + \sin C - \sin A}{\sin B + \sin C + \sin A} = \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}$

   (iii) $\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} = 1 + 4\sin\frac{B+C}{4}\sin\frac{C+A}{4}\sin\frac{A+B}{4}$

   $= 1 + 4\sin\frac{\pi - A}{4}\sin\frac{\pi - B}{4}\sin\frac{\pi - C}{4}$

   (iv) $\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2} = 4\cos\frac{\pi - A}{4}\cos\frac{\pi - B}{4}\cos\frac{\pi - C}{4}$

   (v) $\sin(B + C - A) + \sin(C + A - B) + \sin(A + B - C) = 4\sin A\sin B\sin C$

   (vi) $\frac{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}{\sin A + \sin B + \sin C} = 8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

   (vii) $(\cot B + \cot C)(\cot C + \cot A)(\cot A + \cot B) = \operatorname{cosec} A\operatorname{cosec} B\operatorname{cosec} C$

$A + B + C = \frac{\pi}{2}$ হলে, প্রমাণ করুন (5 - 7)

5. $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 1 - 2\sin A\sin B\sin C$
6. $\cot A + \cot B + \cot C = \cot A\cot B\cot C$
7. $\tan B\tan C + \tan C\tan A + \tan A\tan B = 1$
8. $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$ হলে প্রমাণ করুন $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$

9. $A+B+C=0$ হলে, প্রমাণ করুন

   (i) $\cos A+\cos B+\cos C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}-1$

   (ii) $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=2(\sin A+\sin B+\sin C)(1+\cos A+\cos B+\cos C)$

10. (i) যদি $A+B+C=\pi$ এবং $\cot A+\cot B+\cot C=\sqrt{3}$ হয়, তাহলে দেখান যে, $A=B=C$

    (ii) যদি $A+B+C=\pi$ এবং $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=\sin B\sin C+\sin C\sin A+\sin A\sin B$ হয়, তাহলে দেখান যে, $A=B=C$

11. যদি $A+B+C=n\pi$ হয়, তাহলে প্রমাণ করুন যে, $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$

পাঠ ৮.৭ ত্রিভুজের গুণাবলী: ত্রিভুজের সাইন সূত্র

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- ত্রিভুজের সাইন সূত্র বর্ণনা করতে পারবেন,
- সমস্যা সমাধানে সূত্রটি প্রয়োগ করতে করবেন।

মুখ্য শব্দ	সাইন সূত্র

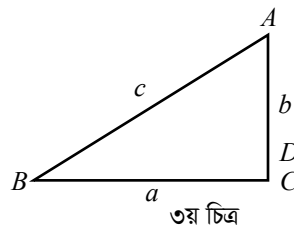
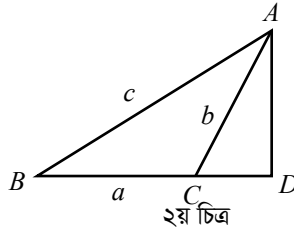
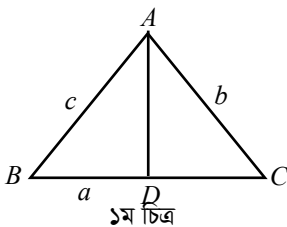
মূলপাঠ

যেকোনো ত্রিভুজের তিনটি বাহু ও তিনটি কোণ, মোট ছয়টি উপাদান রয়েছে। ABC ত্রিভুজের $\angle BAC, \angle ABC$ ও $\angle ACB$ কোণগুলোকে যথাক্রমে $\angle A, \angle B$ ও $\angle C$ এবং $\angle A, \angle B$ ও $\angle C$ কোণের বিপরীত BC, CA ও AB বাহুগুলোকে যথাক্রমে a, b ও c দ্বারা নির্দেশ করা হয়। ত্রিভুজের এই ছয়টি উপাদান অনপেক্ষ নয়। ত্রিভুজের কোণ ও বাহুগুলো পরস্পর পরস্পরের সাথে সম্পর্কযুক্ত। যেকোনো ত্রিভুজে $A+B+C=180^o$

সাইন সূত্র: যেকোনো ত্রিভুজের বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য তার বিপরীত কোণের সাইন (sine) এর অনুপাতের সমানুপাতিক।

অর্থাৎ যেকোনো ত্রিভুজ ABC হলে প্রমাণ করতে হবে, $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$

প্রমাণ: মনে করুন, ABC একটি ত্রিভুজ। A বিন্দু থেকে BC এর উপর AD লম্ব অঙ্কন করুন। ২য় চিত্রে, AD লম্বটি BC এর বর্ধিতাংশের উপর এবং ৩য় চিত্রে, AD লম্বটি AC বাহুর সাথে মিলে যাবে।

১ম চিত্র ২য় চিত্র ৩য় চিত্র

১ম চিত্রে C কোণটি সূক্ষ্মকোণ, ২য় চিত্রে C কোণ স্থুল কোণ এবং ৩য় চিত্রে C কোণ সমকোণ।

এখন, ΔABC-এ, $AD=AB\sin\angle ABD=c\sin B.$

আবার, ΔACD এ, $AD=AC\sin\angle ACD=b\sin C$ [১ম চিত্রানুযায়ী]

$=AC\sin(\pi-C)=b\sin C$ [২য় চিত্রানুযায়ী]

$\therefore b\sin C = c\sin B$, অর্থাৎ, $\dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$

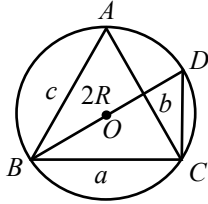
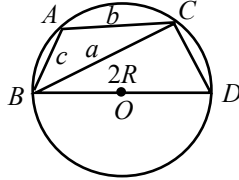
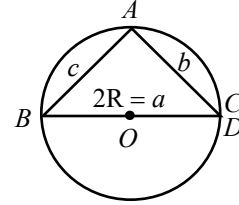
৩য় চিত্রে, C কোণটি সমকোণ বলে আমরা পাই, $\dfrac{b}{c} = \sin B$, অর্থাৎ, $\dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{1} = \dfrac{c}{\sin 90^{\circ}} = \dfrac{c}{\sin C}$

সুতরাং যেকোনো ধরনের ত্রিভুজ নেওয়া হোক না কেন আমরা প্রত্যেক ক্ষেত্রেই পাই, $\dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$;

অনুরূপভাবে, B বিন্দু হতে CA বাহুর উপর লম্ব অঙ্কন করে পাওয়া যায়, $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{c}{\sin C}$

অতএব, ত্রিভুজটি সূক্ষ্মকোণী, স্থূলকোণী বা সমকোণী যা হোক না কেন প্রত্যেক ক্ষেত্রে পাওয়া যায়,

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

বিকল্প প্রমাণঃ $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$, যখন ত্রিভুজের পরিলিখিত বৃত্তের ব্যাসার্ধের পরিমাণ R হয়।

১ম চিত্র ২য় চিত্র ৩য় চিত্র

মনে করুন, ABC ত্রিভুজের পরিলিখিত বৃত্তের কেন্দ্র O এবং ব্যাসার্ধ R,
১ম এবং ২য় চিত্রে B, O যোগ করে এমনভাবে বর্ধিত করুন যেন তা বৃত্তের পরিধিকে D বিন্দুতে ছেদ করে। D, C যোগ করুন। ৩য় চিত্রে, ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ, সুতরাং এক্ষেত্রে BD রেখা BC রেখার সাথে মিলে যাবে।
এখন ১ম এবং ২য় চিত্র হতে পাওয়া যায়, $BD = 2R$ এবং $\angle BCD = 90^{\circ}$

সুতরাং, ΔBCD হতে, $\sin\angle BDC = \dfrac{BC}{BD} = \dfrac{a}{2R}$ ----------------- (i)

যেহেতু ১ম চিত্রানুযায়ী $\angle BDC = \angle A$ এবং ২য় চিত্রানুযায়ী $\angle BDC = \pi - A$;
অতএব উভয় ক্ষেত্রে $\sin\angle BDC = \sin A$.

সুতরাং, (i) নং হতে পাওয়া যায়, $\sin A = \dfrac{a}{2R} \Rightarrow \dfrac{a}{\sin A} = 2R$

এখন ৩য় চিত্রানুযায়ী $BD = a$,

অর্থাৎ, $2R = a \Rightarrow \dfrac{a}{1} = 2R \Rightarrow \dfrac{a}{\sin 90^{\circ}} = 2R \Rightarrow \dfrac{a}{\sin A} = 2R$

সুতরাং প্রত্যেক ক্ষেত্রেই আমরা পাই, $\dfrac{a}{\sin A} = 2R$

অনুরূপভাবে দেখানো যায় যে, $\dfrac{b}{\sin A} = 2R$, এবং $\dfrac{c}{\sin A} = 2R$

অতএব, আমরা পাই, $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$

উদাহরণ 1: যেকোনো ত্রিভুজে প্রমাণ করুন $\dfrac{a+b}{a-b} = \dfrac{\sin A + \sin B}{\sin A - \sin B}$

সমাধানঃ $\dfrac{a+b}{a-b} = \dfrac{2R\sin A + 2R\sin B}{2R\sin A - 2R\sin B} = \dfrac{2R(\sin A + \sin B)}{2R(\sin A - \sin B)} = \dfrac{\sin A + \sin B}{\sin A - \sin B}$

উদাহরণ 2: যেকোনো ত্রিভুজে প্রমাণ করুন $\cos(B-C)+\cos A=\frac{bc}{2R^2}$

সমাধান: $\cos(B-C)+\cos A=2\cos\left(\frac{A+B-C}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B+C}{2}\right)$

$$=2\cos\left(\frac{A+B+C-2C}{2}\right)\cos\left(\frac{A+B+C-2B}{2}\right)=2\cos\left(\frac{\pi}{2}-C\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-B\right)$$

$$=2\sin B\sin C=2.\frac{b}{2R}.\frac{c}{2R}=\frac{bc}{2R^2}$$

উদাহরণ 3: ABC ত্রিভুজ হতে প্রমাণ করুন $\sin\frac{A-B}{2}=\frac{a-b}{c}\cos\frac{C}{2}$

সমাধান: $\frac{a-b}{c}=\frac{2R\sin A-2R\sin B}{2R\sin C}=\frac{2R(\sin A-\sin B)}{2R\sin C}$

$$=\frac{\sin A-\sin B}{\sin C}=\frac{2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)}{2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}$$

$$=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}\quad\left[\Delta ABC\text{ - এ } A+B+C=\pi \quad \therefore \frac{A+B}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right]$$

$$=\frac{\sin\frac{C}{2}\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}=\frac{\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\cos\frac{C}{2}}$$

$$\therefore \sin\frac{A-B}{2}=\frac{a-b}{c}\cos\frac{C}{2}$$

উদাহরণ 4: যেকোনো ত্রিভুজে প্রমাণ করুন $\frac{a^2\sin(B-C)}{\sin A}+\frac{b^2\sin(C-A)}{\sin B}+\frac{c^2\sin(A-B)}{\sin C}=0$

সমাধান: $\frac{a^2\sin(B-C)}{\sin A}=\frac{4R^2\sin^2 A\sin(B-C)}{\sin A}=4R^2\sin A\sin(B-C)$

$$=4R^2\sin\{\pi-(B+C)\}\sin(B-C)\qquad[\because \Delta ABC\text{-এ } A+B+C=\pi]$$

$$=4R^2\sin(B+C)\sin(B-C)=4R^2\left(\sin^2 B-\sin^2 C\right)$$

অনুরূপভাবে, $\frac{b^2\sin(C-A)}{\sin B}=4R^2\left(\sin^2 C-\sin^2 A\right)$ এবং $\frac{c^2\sin(A-B)}{\sin C}=4R^2\left(\sin^2 A-\sin^2 B\right)$

এখন $\frac{a^2\sin(B-C)}{\sin A}+\frac{b^2\sin(C-A)}{\sin B}+\frac{c^2\sin(A-B)}{\sin C}$

$$=4R^2\left(\sin^2 B-\sin^2 C\right)+4R^2\left(\sin^2 C-\sin^2 A\right)+4R^2\left(\sin^2 A-\sin^2 B\right)$$

$$=4R^2\left(\sin^2 B-\sin^2 C+\sin^2 C-\sin^2 A+\sin^2 A-\sin^2 B\right)=4R^2.0=0$$

সারসংক্ষেপ

- যেকোনো ত্রিভুজ ABC -এ, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$
- $a = 2R\sin A, \quad b = 2R\sin B, \quad c = 2R\sin C$
- $\sin A = \frac{a}{2R}, \quad \sin B = \frac{a}{2R}, \quad \sin C = \frac{a}{2R}$

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৮.৭

যেকোনো ত্রিভুজে প্রমাণ করুন

1. $a \sin\left(\frac{A}{2} + B\right) = (b+c) \sin\frac{A}{2}$ 2. $a (\sin B – \sin C) + b (\sin C – \sin A) + c(\sin A – \sin B) = 0$
3. $a \sin(B – C) + b \sin(C – A) + c \sin(A – B) = 0$

পাঠ ৮.৮ ত্রিভুজের গুণাবলী: ত্রিভুজের কোসাইন সূত্র

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- ত্রিভুজের কোসাইন সূত্র বর্ণনা করতে পারবেন,
- সমস্যা সমাধানে সূত্র প্রয়োগ করতে করবেন।

মুখ্য শব্দ	কোসাইন সূত্র

মূলপাঠ

কোসাইন সূত্র: *ABC* যেকোনো ত্রিভুজে,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \text{ বা, } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

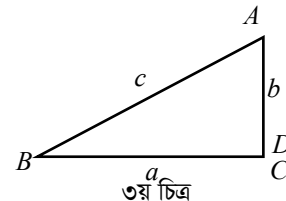
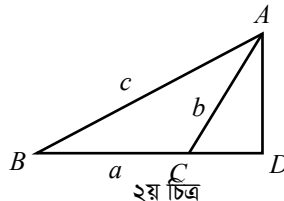
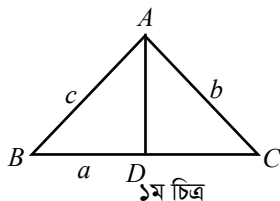
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B \text{ বা, } \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \text{ বা, } \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

প্রমাণ: মনে করুন, ABC একটি ত্রিভুজ। A বিন্দু থেকে BC এর উপর AD লম্ব অঙ্কন করুন। ২য় চিত্রে, AD লম্বটি BC এর বর্ধিতাংশের উপর এবং ৩য় চিত্রে, AD লম্বটি AC বাহুর সাথে মিলে যাবে।

A c b B a D C
১ম চিত্র

A c b B a C D
২য় চিত্র

A c b D B a C
৩য় চিত্র

C-কে সূক্ষ্মকোণ ধরলে ১ম চিত্রে আমরা পাই, $AB^2 = BC^2 + CA^2 - 2BC.CD$

এখন ΔACD থেকে, $CD = AC \cos C = b \cos C$

$\therefore c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

আবার C-কে স্থূলকোণ ধরলে ২য় চিত্র হতে আমরা পাই, $AB^2 = BC^2 + CA^2 + 2BC.CD$

এখন ΔACD থেকে, $CD = AC \cos ACD = b\cos(\pi - C) = -b\cos C$

$\therefore c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

আবার C-কে সমকোণ ধরলে ৩য় চিত্র হতে, $AB^2 = BC^2 + CA^2$

অর্থাৎ, $c^2 = a^2 + b^2$

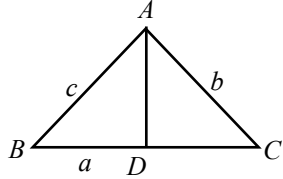
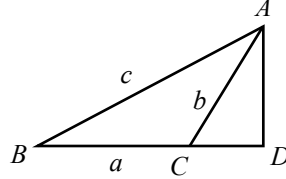
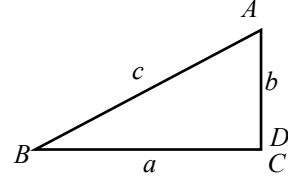
$\quad = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \quad [\because \cos C = \cos 90° = 0]$

অতএব, C সূক্ষ্মকোণ, স্থূলকোণ অথবা সমকোণ যাই হোক না কেন আমরা পাই, $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

অর্থাৎ, $\cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

অনুরূপভাবে $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ এবং $\cos B = \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$ সূত্র দুইটি প্রতিষ্ঠিত করা যায়।

যেকোনো ত্রিভুজে প্রমাণ করতে হবে যে, $a = b \cos C + c \cos B$, $b = c \cos A + a \cos C$, $c = a \cos B + b \cos A$

প্রমাণঃ মনে করুন, ABC একটি ত্রিভুজ। A বিন্দু থেকে BC এর উপর AD লম্ব অঙ্কন করুন। ২য় চিত্রে, AD লম্বটি BC এর বর্ধিতাংশের উপর এবং ৩য় চিত্রে, AD লম্বটি AC বাহুর সাথে মিলে যাবে।

১ম চিত্র ২য় চিত্র ৩য় চিত্র

১ম চিত্রে C সূক্ষ্মকোণ। অতএব, $BC = BD + CD = AB \cos ABD + AC \cos ACD$

$\therefore a = c \cos B + b \cos C$

২য় চিত্রে C স্থূলকোণ। অতএব, $BC = BD - CD = AB \cos ABD - AC \cos ACD$

$= c \cos B - b \cos(\pi - C) = c \cos B + b \cos C$

$\therefore a = b \cos C + c \cos B$

আবার ৩য় চিত্রে C সমকোণ। অতএব, $BC = AB \cos ABC$

$= AB \cos ABC + AC \cos ACB \; [\because \cos ACB = \cos C = \cos 90° = 0]$

$\therefore a = b \cos C + c \cos B$

সুতরাং; প্রতি ক্ষেত্রেই পাওয়া যায়, $a = b \cos C + c \cos B$

একইভাবে, অন্য সম্পর্ক দুটিও প্রতিষ্ঠিত করা যায়।

[**নোটঃ** $b = c \cos A + a \cos C$ ও $c = a \cos B + b \cos A$ প্রমাণের জন্য যথাক্রমে $\angle B$ ও $\angle C$ কে শীর্ষকোণ ধরতে হবে]

উদাহরণ 1: যেকোনো ত্রিভুজে প্রমাণ করতে হবে $(b+c) \cos A + (c+a) \cos B + (a+b) \cos C = a+b+c$

সমাধানঃ $(b+c) \cos A + (c+a) \cos B + (a+b) \cos C$

$= b \cos A + c \cos A + c \cos B + a \cos B + a \cos C + b \cos C$

$= (b \cos C + c \cos B) + (c \cos A + a \cos C) + (a \cos B + b \cos A) = a + b + c$

উদাহরণ 2: যেকোনো ত্রিভুজে প্রমাণ করুন $a^2+b^2+c^2 = 2(bc \cos A + ca \cos B + ab \cos C)$

সমাধানঃ $a = b \cos C + c \cos B$

$\therefore\ a^2 = ab\cos C + ac\cos B$ ... ... (i)

$b = c\cos A + a\cos C$

$\therefore\ b^2 = bc\cos A + ab\cos C$ ... ... (ii)

$c = a\cos B + b\cos A$

$\therefore\ c^2 = ca\cos B + bc\cos A$ ... ... (iii)

(i), (ii) ও (iii) যোগ করে পাই

$a^2+b^2+c^2 = ab\cos C + ac\cos B + bc\cos A + ab\cos C + ca\cos B + bc\cos A$

$= 2(bc\cos A + ca\cos B + ab\cos C)$

<u>বিকল্প প্রমাণ</u> $2(bc\cos A + ca\cos B + ab\cos C)$

$$= 2\left(bc.\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} + ca.\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca} + ab.\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)$$

$$= 2.\frac{1}{2}\left(b^2+c^2-a^2+c^2+a^2-b^2+a^2+b^2-c^2\right) = a^2+b^2+c^2$$

উদাহরণ 3: যেকোনো ত্রিভুজে প্রমাণ করতে হবে, $\dfrac{a\sin(B-C)}{b^2-c^2} = \dfrac{b\sin(C-A)}{c^2-a^2} = \dfrac{c\sin(A-B)}{a^2-b^2}$

সমাধান: $\dfrac{a\sin(B-C)}{b^2-c^2} = \dfrac{a(\sin B\cos C - \cos B\sin C)}{b^2-c^2}$

$$\frac{a\left(\frac{b}{2R}\cos C - \frac{c}{2R}\cos B\right)}{b^2-c^2} = \frac{\frac{a}{2R}(b\cos C - c\cos B)}{b^2-c^2}$$

$$= \frac{a(a - c\cos B - c\cos B)}{2R(b^2-c^2)} \quad [\because a = b\cos C + c\cos B]$$

$$= \frac{a(a - 2c\cos B)}{2R(b^2-c^2)} = \frac{a\left(a - 2c\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\right)}{2R(b^2-c^2)}$$

$$= \frac{(a^2-c^2-a^2+b^2)}{2R(b^2-c^2)} = \frac{b^2-c^2}{2R(b^2-c^2)} = \frac{1}{2R}$$

অনুরূপভাবে, $\dfrac{b\sin(C-A)}{c^2-a^2} = \dfrac{1}{2R}$ এবং $\dfrac{c\sin(A-B)}{a^2-b^2} = \dfrac{1}{2R}$

$$\therefore \frac{a\sin(B-C)}{b^2-c^2} = \frac{b\sin(C-A)}{c^2-a^2} = \frac{c\sin(A-B)}{a^2-b^2}$$

অনুসিদ্ধান্ত: $\tan A = \dfrac{\sin A}{\cos A} = \dfrac{\frac{a}{2R}}{\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}} = \dfrac{abc}{2R}.\dfrac{1}{b^2+c^2-a^2}$

অনুরূপভাবে, $\tan B = \dfrac{abc}{2R}.\dfrac{1}{c^2+a^2-b^2}$

এবং $\tan C = \dfrac{abc}{2R}.\dfrac{1}{a^2+b^2-c^2}$

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৮.৮

যেকোনো ত্রিভুজে প্রমাণ করতে হবে যে,

1. $\dfrac{(b+c)\cos A+(c+a)\cos B+(a+b)\cos C}{\sin A+\sin B+\sin C}=\dfrac{a}{\sin A}=2R$
2. $b^2\sin 2C+c^2\sin 2B=2bc\sin A$
3. $\dfrac{2\cot A+\cot B+\cot C}{\cot A+\cot B+2\cot C}=\dfrac{b^2+c^2}{2b^2-c^2}$

পাঠ ৮.৯ ত্রিভুজের গুণাবলী: ত্রিভুজের যেকোনো কোণের অনুপাতকে তার বাহুর মাধ্যমে প্রকাশ

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- ত্রিভুজের অর্ধকোণ সমূহের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতকে তার বাহুর মাধ্যমে প্রকাশ করতে পারবেন,
- ত্রিভুজের যেকোনো কোণের সাইন-এর অনুপাতকে তার বাহুর মাধ্যমে প্রকাশ করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	ত্রিভুজ, কোণ, বাহু, পরিসীমা, অনুপাত

মূলপাঠ

ত্রিভুজের অর্ধকোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতকে বাহুর মাধ্যমে প্রকাশ

(i) আমরা জানি, $2\sin^2\dfrac{A}{2}=1-\cos A=1-\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2bc}$

$$=\frac{a^2-(b^2-2bc+c^2)}{2bc}=\frac{a^2-(b-c)^2}{2bc}=\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2bc}$$

যদি ত্রিভুজের পরিসীমার অর্ধেককে s দ্বারা সূচিত করা হয়, তবে $2s=a+b+c$

এখন, $a+b-c=a+b+c-2c=2s-2c=2(s-c)$

এবং $a-b+c=a+b+c-2b=2s-2b=2(s-b)$

অতএব, $2\sin^2\dfrac{A}{2}=\dfrac{2(s-c).2(s-b)}{2bc}=\dfrac{2(s-b)(s-c)}{bc}$

বা, $\sin^2\dfrac{A}{2}=\dfrac{(s-b)(s-c)}{bc}$

$\therefore \sin\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{(s-b)(s-c)}{bc}}$

যেহেতু ত্রিভুজের যেকোনো কোণ 180° অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর, অতএব $\dfrac{A}{2}<90^\circ$ এবং $\sin\dfrac{A}{2}$ এর মান ধনাত্মক।

(ii) আমরা জানি, $2\cos^2\dfrac{A}{2}=1+\cos A=1+\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$$=\frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}=\frac{(a+b+c)(b+c-a)}{2bc}$$

এখন, $b+c-a=a+b+c-2a=2s-2a=2(s-a)$

অতএব, $2\cos^2\frac{A}{2}=\frac{2s.2(s-a)}{2bc}=\frac{2s(s-a)}{bc}$

বা, $\cos^2\frac{A}{2}=\frac{s(s-a)}{bc}$

$\therefore \cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$

যেহেতু $\frac{A}{2}$ সূক্ষ্মকোণ অতএব $\cos\frac{A}{2}$ ধনাত্মক। সুতরাং, বর্গমূলের ধনাত্মক মান নেয়া হয়েছে।

(iii) $\tan\frac{A}{2}=\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}=\frac{\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}}{\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$

অনুরূপভাবে, $\frac{B}{2}$ এবং $\frac{C}{2}$ কোণ দুটির ত্রিকোণমিতিক অনুপাতকেও বাহুর মাধ্যমে প্রকাশ করা যায়।

অতএব, আমরা পাই, $\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$, $\sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}}$, $\sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}$

$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$, $\cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{s(s-b)}{ca}}$, $\cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}$

$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$, $\tan\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}$, $\tan\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$

ত্রিভুজের যেকোনো কোণের সাইন (sine)-এর অনুপাতকে তার বাহুর মাধ্যমে প্রকাশ

আমরা জানি, $\sin A=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}=2.\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}.\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}=\frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

অনুরূপভাবে, $\sin B=\frac{2}{ca}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ এবং $\sin C=\frac{2}{ab}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

উদাহরণ 1: যেকোনো ত্রিভুজে প্রমাণ করতে হবে যে, $\frac{b-c}{a}\cos^2\frac{A}{2}+\frac{c-a}{b}\cos^2\frac{B}{2}+\frac{a-b}{c}\cos^2\frac{C}{2}=0$

সমাধানঃ $\frac{b-c}{a}\cos^2\frac{A}{2}+\frac{c-a}{b}\cos^2\frac{B}{2}+\frac{a-b}{c}\cos^2\frac{C}{2}$

$$=\frac{b-c}{a}\frac{s(s-a)}{bc}+\frac{c-a}{b}\frac{s(s-b)}{ca}+\frac{a-b}{c}\frac{s(s-c)}{ab}$$

$$=\frac{s}{abc}\{(b-c)(s-a)+(c-a)(s-b)+(a-b)(s-c)\}$$

$$=\frac{s}{abc}(bs-ab-cs+ac+cs-bc-as+ab+as-ac-bs+bc)=\frac{s}{abc}\times 0=0$$

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৮.৯

যেকোনো ত্রিভুজে প্রমাণ করতে হবে যে,

1. $\frac{1}{a}\cos^2\frac{A}{2}+\frac{1}{b}\cos^2\frac{B}{2}+\frac{1}{c}\cos^2\frac{C}{2}=\frac{(a+b+c)^2}{4abc}=\frac{s^2}{abc}$

2. $bc\cos^2\frac{A}{2}+ca\cos^2\frac{B}{2}+ab\cos^2\frac{C}{2}=s^2$

পাঠ ৮.১০ ত্রিভুজের গুণাবলী: ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয়

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল সম্পর্কিত সূত্রগুলো বর্ণনা করতে পারবেন,
- সূত্র প্রয়োগে ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল সম্পর্কিত সমস্যার সমাধান করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	ত্রিভুজ, ভূমি, উচ্চতা, পরিসীমা, ক্ষেত্রফল

মূলপাঠ

ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

মনে করুন, ABC একটি ত্রিভুজ এবং এর ক্ষেত্রফলকে Δ দ্বারা সূচিত করা হল। BC ভূমির উপর AD লম্ব অঙ্কন করুন। তাহলে ΔACD হতে, $AD = AC\sin\angle ACD = b\sin C$

এখন জ্যামিতি থেকে আমরা জানি, $\Delta = \frac{1}{2}\times$ ভূমি $\times$ উচ্চতা

অর্থাৎ, $\Delta=\frac{1}{2}\,BC.\,AD=\frac{1}{2}\,a.b\sin C=\frac{1}{2}\,ab\sin C$

A, B, C, D, a, b, c

অনুরূপভাবে B এবং C বিন্দু হতে বিপরীত বাহুর উপর লম্ব অঙ্কন করে দেখান যায় যে,

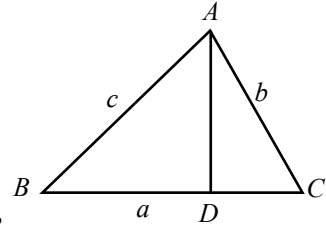
$$\Delta=\frac{1}{2}\,bc\sin A=\frac{1}{2}\,ca\sin B$$

অতএব, $\Delta=\frac{1}{2}\,bc\sin A=\frac{1}{2}\,ca\sin B=\frac{1}{2}\,ab\sin C$

অর্থাৎ, $\Delta=\frac{1}{2}\times$(দুই বাহুর দৈর্ঘ্যের গুণফণ)$\times$(বাহু দুটির অন্তর্ভুক্ত কোণের সাইন অনুপাত)

এখন, $\Delta=\frac{1}{2}\,bc\sin A=\frac{1}{2}\,bc.\,2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}=bc\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$

$$\therefore \Delta = bc\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}.\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

আবার আমরা জানি, ত্রিভুজের পরিসীমার অর্ধেক $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$

অতএব, $\Delta=\sqrt{\frac{1}{2}(a+b+c)\left\{\frac{1}{2}(a+b+c)-a\right\}\left\{\frac{1}{2}(a+b+c)-b\right\}\left\{\frac{1}{2}(a+b+c)-c\right\}}$

$$=\sqrt{\frac{1}{16}(a+b+c)(a+b+c-2a)(a+b+c-2b)(a+b+c-2c)}$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}=\frac{1}{4}\sqrt{\left\{(a+b)^2-c^2\right\}\left\{c^2-(a-b)^2\right\}}$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{c^2\left\{(a+b)^2-(a-b)^2\right\}-\left(a^2-b^2\right)^2-c^4}=\frac{1}{4}\sqrt{c^2\left(2a^2+2b^2\right)-\left(a^4-2a^2b^2+b^4\right)-c^4}$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4}$$

আবার, $\Delta=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}bc.\ \frac{a}{2R}=\frac{abc}{4R}$

উদাহরণ 1: যেকোনো ত্রিভুজে প্রমাণ করতে হবে $\frac{1}{a}\sin A+\frac{1}{b}\sin B+\frac{1}{C}\sin C=\frac{6\Delta}{abc}$

সমাধানঃ $\frac{1}{a}\sin A+\frac{1}{b}\sin B+\frac{1}{C}\sin C=\frac{1}{a}.\frac{2\Delta}{bc}+\frac{1}{b}.\frac{2\Delta}{ca}+\frac{1}{c}.\frac{2\Delta}{ab}=\frac{2\Delta}{abc}+\frac{2\Delta}{abc}+\frac{2\Delta}{abc}=\frac{6\Delta}{abc}$

উদাহরণ 2: যদি একটি ত্রিভুজের বাহুসমূহ যথাক্রমে $\frac{y}{z}+\frac{z}{x}$, $\frac{z}{x}+\frac{x}{y}$ এবং $\frac{x}{y}+\frac{y}{z}$ হয়, তবে দেখান যে তার ক্ষেত্রফল $\sqrt{\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{x}{y}}$

সমাধানঃ ধরুন ত্রিভুজের পরিসীমার অর্ধেক $=s.$

এখন $2s=\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{z}{x}+\frac{x}{y}+\frac{x}{y}+\frac{y}{z}=2\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{x}{y}\right)\Rightarrow s=\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{x}{y}\right)$

যদি ত্রিভুজের বাহুগুলিকে a, b, c দ্বারা সূচিত করা হয় তবে

$s-a=\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{x}{y}\right)-\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)=\frac{x}{y}$; $\quad s-b=\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{x}{y}\right)-\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{y}\right)=\frac{y}{z}$

এবং $s-c=\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{x}{y}\right)-\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}\right)=\frac{z}{x}$

এখন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $\Delta=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$$=\sqrt{\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{x}{y}\right).\frac{x}{y}.\frac{y}{z}.\frac{z}{x}}=\sqrt{\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{x}{y}\right).1}=\sqrt{\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{x}{y}}$$

উদাহরণ 3: যেকোনো ত্রিভুজে প্রমাণ করতে হবে যে, $\left(\frac{a^2}{\sin A}+\frac{b^2}{\sin B}+\frac{c^2}{\sin C}\right)\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\Delta$

সমাধানঃ $\left(\frac{a^2}{\sin A}+\frac{b^2}{\sin B}+\frac{c^2}{\sin C}\right)\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

$$=\left(\frac{4R^2\sin^2 A}{\sin A}+\frac{4R^2\sin^2 B}{\sin B}+\frac{4R^2\sin^2 C}{\sin C}\right)\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$=4R^2(\sin A+\sin B+\sin C)\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=4R^2.4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$=2R^2.2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}.2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}.2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$=2R^2\sin A\sin B\sin C=\frac{1}{2}.2R\sin A.2R\sin B.\sin C=\frac{1}{2}ab\sin C=\Delta$$

সারসংক্ষেপ

- ত্রিভুজের দুইটি বাহু a, b এবং তাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ C হলে $\Delta=\frac{1}{2}ab\sin C$
- ত্রিভুজের দুইটি বাহু b, c এবং তাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ A হলে $\Delta=\frac{1}{2}bc\sin A$
- ত্রিভুজের দুইটি বাহু c, a এবং তাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ B হলে $\Delta=\frac{1}{2}ca\sin B$
- ত্রিভুজের তিনটি বাহু a, b, c হলে $\Delta=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$; যেখানে s ত্রিভুজের অর্ধপরিসীমা
- ABC ত্রিভুজের তিনটি বাহু a, b, c এবং পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ R হলে, $\Delta=\frac{abc}{4R}$

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৮.১০

যেকোনো ত্রিভুজে প্রমাণ করতে হবে

1. $a^2\cot A+b^2\cot B+c^2\cot C=4\Delta$

2. $\frac{a^2-b^2}{2}\frac{\sin A\sin B}{\sin(A-B)}=\Delta$

3. $a\sin B\sin C+b\sin C\sin A+c\sin A\sin B=\frac{3D}{R}$

পাঠ ৮.১১ ত্রিভুজের গুণাবলী: ত্রিভুজের অন্যান্য সূত্র

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- ত্রিভুজের কয়েকটি সূত্র প্রমাণ করতে পারবেন,
- ত্রিভুজের সূত্রাবলী প্রয়োগ করতে পারবেন।

মূলপাঠ

যে কোন ত্রিভুজে প্রমাণ করুন

$\tan\frac{B-C}{2}=\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}$; $\tan\frac{C-A}{2}=\frac{c-a}{c+a}\cot\frac{B}{2}$; $\tan\frac{A-B}{2}=\frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2}$

প্রমাণ: আমরা জানি, যে কোন ত্রিভুজে $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$; বা, $\frac{b}{c} = \frac{\sin B}{\sin C}$

$$\therefore \frac{b-c}{b+c} = \frac{\sin B - \sin C}{\sin B + \sin C} = \frac{2\cos\frac{B+C}{2}\sin\frac{B-C}{2}}{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}} = \cot\frac{B+C}{2}\ \tan\frac{B-C}{2}$$

$$= \cot\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right)\tan\frac{B-C}{2}\ \left[\because \frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}=\frac{\pi}{2}\right] = \tan\frac{A}{2}\ \tan\frac{B-C}{2}$$

সুতরাং $\tan\frac{A}{2}\ \tan\frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c} \Rightarrow \tan\frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c}\cdot\frac{1}{\tan\frac{1}{2}A} = \frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}$.

অনুরূপভাবে, অন্য সম্পর্কগুলিও প্রতিষ্ঠা করা যায়।

কয়েকটি প্রয়োজনীয় সূত্র

(i) আমরা জানি, $\sin A = \frac{a}{2R}$ এবং $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$$\therefore \tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{a/2R}{(b^2+c^2-a^2)/2bc} = \frac{abc}{R}\cdot\frac{1}{b^2+c^2-a^2}$$

অনুরূপভাবে, $\tan B = \frac{abc}{R}\cdot\frac{1}{c^2+a^2-b^2}$; এবং $\tan C = \frac{abc}{R}\cdot\frac{1}{a^2+b^2-c^2}$

(ii) আমরা জানি, $\tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$

ডানপক্ষের লব ও হরকে $\sqrt{(s-b)(s-c)}$ দ্বারা গুণ করে আমরা পাই,

$$\tan\frac{A}{2} = \frac{(s-b)(s-c)}{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}} = \frac{(s-b)(s-c)}{\Delta}$$ [Δ দ্বারা ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল সূচিত হল]

অনুরূপভাবে, $\tan\frac{B}{2} = \frac{(s-c)(s-a)}{\Delta}$ এবং $\tan\frac{C}{2} = \frac{(s-a)(s-b)}{\Delta}$

(iii) আবার, $\tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$

অর্থাৎ, $\cot\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{(s-b)(s-c)}} = \frac{s(s-a)}{\Delta}$ [ডান পক্ষের লব ও হরকে $\sqrt{s(s-a)}$ দ্বারা গুণ করে]

অনুরূপভাবে, $\cot\frac{B}{2} = \frac{s(s-b)}{\Delta}$ এবং $\cot\frac{C}{2} = \frac{s(s-c)}{\Delta}$

উদাহরণ 1: যে কোন ত্রিভুজে প্রমাণ করতে হবে, $(b-c)\cot\frac{A}{2} + (c-a)\cot\frac{B}{2} + (a-b)\cot\frac{C}{2} = 0$

সমাধান: $(b-c)\cot\frac{A}{2} + (c-a)\cot\frac{B}{2} + (a-b)\cot\frac{C}{2} = (b-c)\frac{s(s-a)}{\Delta} + (c-a)\frac{s(s-b)}{\Delta} + (a-b)\frac{s(s-c)}{\Delta}$

$$= \frac{s}{\Delta}\{(b-c)(s-a)+(c-a)(s-b)+(a-b)(s-c)\}$$

$$= \frac{s}{\Delta}(bs-ab-cs+ca+cs-bc-as+ab+ab-ca-bs+bc) = \frac{s}{\Delta}\times 0 = 0$$

উদাহরণ 2 ঃ যে কোন ত্রিভুজে প্রমাণ কর যে, $\frac{(a+b+c)^2}{\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}} = 4\Delta$

সমাধান: $\dfrac{(a+b+c)^2}{\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}} = \dfrac{(a+b+c)^2}{\frac{s(s-a)}{\Delta}+\frac{s(s-b)}{\Delta}+\frac{s(s-c)}{\Delta}} = \dfrac{\Delta(a+b+c)^2}{s(s-a)+s(s-b)+s(s-c)}$

$= \dfrac{\Delta(2s)^2}{s^2-as+s^2-bs+s^2-cs} = \dfrac{\Delta.4s^2}{3s^2-s(a+b+c)} = \dfrac{4\Delta.s^2}{3s^2-s.2s}$

$= \dfrac{4\Delta.s^2}{3s^2-2s^2} = \dfrac{4\Delta.s^2}{s^2} = 4\Delta$

পাঠ ৮.১২ ত্রিভুজের গুণাবলী: বিবিধ সমস্যা ও সমাধান

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- ত্রিভুজের গুণাবলী সম্পর্কিত বিভিন্ন সমস্যা সমাধান করতে পারবেন।

মূলপাঠ

উদাহরণ 1: যে কোন ত্রিভুজে প্রমাণ করতে হবে $\dfrac{b+c}{b-c} = \cot\dfrac{A}{2}\ \cot\dfrac{B-C}{2}$

সমাধান: $\dfrac{b+c}{b-c} = \dfrac{2R\sin B+2R\sin C}{2R\sin B-2R\sin C} = \dfrac{2R(\sin B+\sin C)}{2R(\sin B-\sin C)} = \dfrac{\sin B+\sin C}{\sin B-\sin C}$

$= \dfrac{2\sin\left(\frac{B+C}{2}\right)\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{B+C}{2}\right)\sin\left(\frac{B-C}{2}\right)} = \tan\left(\dfrac{B+C}{2}\right)\ \cot\left(\dfrac{B-C}{2}\right)$

$= \tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{A}{2}\right)\cot\left(\dfrac{B-C}{2}\right)$ [$\because$ $\triangle ABC$ -এ $A+B+C=\pi$] $= \cot\dfrac{A}{2}\ \cot\dfrac{B-C}{2}$

উদাহরণ 2: যে কোন ত্রিভুজে প্রমাণ করুন $\dfrac{\sin(B-C)}{\sin A} = \dfrac{b\cos C-c\cos B}{b\cos C+c\cos B}$

সমাধান: $\dfrac{\sin(B-C)}{\sin A} = \dfrac{\sin B\cos C-\cos B\sin C}{\sin A} = \dfrac{\frac{b}{2R}\cos C-\frac{c}{2R}\cos B}{\frac{a}{2R}}$

$= \dfrac{b\cos C-c\cos B}{a} = \dfrac{b\cos C-\cos B}{b\cos C+\cos B}$

উদাহরণ 3: যে কোন ত্রিভুজে প্রমাণ করুন $a^3\cos(B-C)+b^3\cos(C-A)+c^3\cos(A-B)=3abc$

সমাধান: $a^3\cos(B-C) = 8R^3\sin^3 A\cos(B-C) = 8R^3\sin^2 A\sin A\cos(B-C)$

$= 8R^3\sin^2 A\sin\{\pi-(B+C\}\cos(B-C)$ [$\because$ $\triangle ABC$ এ $A+B+C=\pi$]

$= 4R^3\sin^2 A.2\sin(B+C)\cos(B-C) = 4R^3\sin^2 A\ .\ (\sin 2B+\sin 2C)$

$= 4R^3\sin^2 A\ (2\sin B\cos B+2\sin C\cos C) = 8R^3\sin^2 A(\sin B\cos B+\sin C\cos C)$

অনুরূপভাবে, $b^3\cos(C-A) = 8R^3\sin^2 B\ (\sin C\cos C+\sin A\cos A)$

$$c^3\cos(A-B) = 8R^3\sin^2C\,(\sin A\cos A + \sin B\cos B)$$

এখন $a^3\cos(B-C) + b^3\cos(C-A) + C^3\cos(A-B)$

$= 8R^3[\sin A(\sin B\cos B + \sin C\cos C) + \sin^2B(\sin C\cos C + \sin A\cos A)$
$+\sin^2C(\sin A\cos A + \sin B\cos B)]$

$= 8R^3\,[\sin A\sin B\,(\sin A\cos B + \cos A\sin B) + \sin B\sin C\,(\sin B\cos C + \cos B\sin C)$
$+ \sin C\sin A\,(\sin C\cos A + \cos C\sin A)$

$= 8R^3\,[\,\sin A\sin B\sin(A+B) + \sin B\sin C\sin(B+C) + \sin C\sin A\sin(C+A)]$

$= 8R^3\,[\,\sin A\sin B\sin(\pi - C) + \sin B\sin C\sin(\pi - A) + \sin C\sin A\sin(\pi - B)\,]$

$= 8R^3\,[\,\sin A\sin B\sin C + \sin B\sin C\sin A + \sin C\sin A\sin B]$

$= 8R^3\times 3\sin A\sin B\sin C$

$= 3(2R\sin A)\,(2R\sin B)\,(2R\sin C)$

$= 3abc.$

উদাহরণ 4: যে কোন ত্রিভুজে প্রমাণ করুন $c^2 = (a-b)^2\cos^2\frac{C}{2} + (a+b)^2\sin^2\frac{C}{2}$

সমাধানঃ $(a-b)^2\cos^2\frac{C}{2} + (a+b)^2\sin^2\frac{C}{2} = \frac{1}{2}(a-b)^2(1+\cos C) + \frac{1}{2}(a+b)^2(1-\cos C)$

$= \frac{1}{2}(a-b)^2\left(1+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right) + \frac{1}{2}(a+b)^2\left(1-\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)$

$= \frac{1}{2}(a-b)^2\left(\frac{2ab+a^2+b^2-c^2}{2ab}\right) + \frac{1}{2}(a+b)^2\left(\frac{2ab-a^2-b^2+c^2}{2ab}\right)$

$= \frac{1}{2}(a-b)^2\left\{\frac{(a+b)^2-c^2}{2ab}\right\} + \frac{1}{2}(a+b)^2\left\{\frac{c^2-(a-b)^2}{2ab}\right\}$

$= \frac{1}{4ab}\left[(a-b)^2\{(a+b)^2 - c^2\} + (a+b)^2\,\{c^2-(a-b)^2\}\right]$

$= \frac{1}{4ab}\,[\,(a^2-b^2)^2 - c^2(a-b)^2 + c^2(a+b)^2 - (a^2-b^2)^2]$

$= \frac{1}{4ab}\,[\,c^2\{(a+b)^2-(a-b)^2\}] = \frac{1}{4ab}\,.\,[\,c^2.4ab] = c^2$

উদাহরণ 5: একটি ত্রিভুজের বাহুগুলির পরিমাণ যথাক্রমে 3, 5 ও 7 হলে, প্রমাণ করুন ত্রিভুজটি স্থূলকোণী। স্থূলকোণটি নির্ণয় করুন।

সমাধানঃ ত্রিভুজটির বাহুগুলির পরিমাণ = 3, 5, 7

$\therefore$ বৃহত্তম বাহুটি = 7

ধরুন ত্রিভুজটির বৃহত্তম কোণটি A.

$\therefore\ \cos A = \frac{3^2+5^2-7^2}{2.3.5} = \frac{9+25-49}{30} = \frac{34-39}{30} = \frac{-15}{30} = -\frac{1}{2}$

$\therefore\ \cos A = -\frac{1}{2} = \cos 120° \ \Rightarrow\ A = 120°$

যেহেতু ত্রিভুজটির একটি কোণ স্থূলকোণ। অতএব ত্রিভুজটি স্থূলকোণী এবং স্থূল কোণটি 120°।

উদাহরণ 6: যদি $(a+b+c)(b+c-a) = 3bc$ হয় তবে A এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধানঃ $(a+b+c)(b+c-a) = 3bc \Rightarrow (b+c)^2-a^2 = 3bc \Rightarrow b^2+c^2+2bc-a^2 = 3bc$

$\Rightarrow b^2+c^2-a^2 = 3bc-2bc \Rightarrow b^2+c^2-a^2 = bc \Rightarrow \frac{b^2+c^2-a^2}{2} = \frac{bc}{2}$

$\Rightarrow \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{1}{2} \Rightarrow\ \cos A = \frac{1}{2} = \cos 60°$

$\therefore\ A = 60°$

উদাহরণ 7: যদি $\dfrac{\cos A+2\cos C}{\cos A+2\cos B} = \dfrac{\sin B}{\sin C}$ হয় তবে দেখান যে, ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু বা সমকোণী।

সমাধান: $\dfrac{\cos A-2\cos C}{\cos A+2\cos B} = \dfrac{\sin B}{\sin C}$

বা, $\cos A\sin C + 2\cos C\sin C = \cos A\sin B + 2\cos B\sin B$

বা, $\cos A\sin C + \sin 2C = \cos A\sin B + \sin 2B$

বা, $\cos A\sin B - \cos A\sin C + \sin 2B - \sin 2C = 0$

বা, $\cos A(\sin B - \sin C) + 2\cos(B+C)\sin(B-C) = 0$

বা, $\cos A\,.2\sin\left(\dfrac{B-C}{2}\right)\cos\left(\dfrac{B+C}{2}\right) + 2\cos(\pi-A)\,.2\sin\dfrac{B-C}{2}\cos\dfrac{B-C}{2} = 0$

বা, $\cos A\sin\left(\dfrac{B-C}{2}\right)\cos\left(\dfrac{B+C}{2}\right) + \cos(-A).\,2\sin\left(\dfrac{B-C}{2}\right)\cos\left(\dfrac{B-C}{2}\right) = 0$

বা, $\cos A\sin\left(\dfrac{B-C}{2}\right)\cos\left(\dfrac{B+C}{2}\right) - 2\cos A\sin\left(\dfrac{B-C}{2}\right)\cos\left(\dfrac{B-C}{2}\right) = 0$

বা, $\cos A\sin\left(\dfrac{B-C}{2}\right)\left[\cos\left(\dfrac{B+C}{2}\right) - 2\cos\left(\dfrac{B-C}{2}\right)\right] = 0$

বা, $\cos A = 0 = \cos 90°$

$\therefore A = 90°$

আবার, $\sin\dfrac{B-C}{2} = 0 = \sin 0$

$\therefore \dfrac{B-C}{2} = 0 \Rightarrow B = C$

সুতরাং ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু কিংবা সমকোণী।

উদাহরণ 8: যদি কোন ত্রিভুজের বাহুগুলি সমান্তর প্রগমণ শ্রেণীভুক্ত হয়, তবে দেখান যে, $\cos A\cot\dfrac{A}{2}$, $\cos B\cot\dfrac{B}{2}$, $\cos C\cot\dfrac{C}{2}$ সমান্তর প্রগমন শ্রেণীভুক্ত।

সমাধান: ধরুন ত্রিভুজের বাহুগুলি যথাক্রমে $a, b, c,$

এখন a,b,c সমান্তর প্রগমন শ্রেণীভুক্ত হবে যদি $b-a = c-b$ হয়,

বা, $a+c = 2b$

$\therefore 2R\sin A + 2R\sin C = 2.2R\sin B$

বা, $2R(\sin A + \sin C) = 2R.2\sin B$

বা, $\sin A + \sin C = 2\sin B$

বা, $2\sin\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{A}{2} + 2\sin\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{C}{2} = 2.2\sin\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{B}{2}$

বা, $2\sin^2\dfrac{A}{2}\dfrac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}} + \sin^2\dfrac{C}{2}\dfrac{\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{C}{2}} = 4\sin^2\dfrac{B}{2}\dfrac{\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{B}{2}}$

বা, $(1-\cos A)\cot\dfrac{A}{2} + (1-\cos C)\cot\dfrac{C}{2} = 2(1-\cos B)\cot\dfrac{B}{2}$

বা, $\cot\dfrac{A}{2} - \cos A\cot\dfrac{A}{2} + \cot\dfrac{C}{2} - \cos C\cot\dfrac{C}{2} = 2\cot\dfrac{B}{2} - 2\cos B\cot\dfrac{B}{2}$

বা, $\cot\dfrac{A}{2} + \cot\dfrac{C}{2} - 2\cot\dfrac{B}{2} = \cos A\cot\dfrac{A}{2} + \cos C\cot\dfrac{C}{2} - 2\cos B\cot\dfrac{B}{2}$

বা, $\frac{s(s-a)}{\Delta}+\frac{s(s-c)}{\Delta}-\frac{2s(s-b)}{\Delta}= \cos A \cot\frac{A}{2} + \cos C \cot\frac{C}{2} - 2\cos B \cot\frac{B}{2}$

বা, $\frac{s}{\Delta}(s-a+s-c-2s+2b)= \cos A \cot\frac{A}{2} + \cos C \cot\frac{C}{2} - 2\cos B \cot\frac{B}{2}$

বা, $\frac{s}{\Delta}\{2b-(a+c)\} = \cos A \cot\frac{A}{2} + \cos C \cot\frac{C}{2} - 2\cos B \cot\frac{B}{2}$

বা, $\frac{s}{\Delta}(2b-2b)= \cos A \cot\frac{A}{2} + \cos C \cot\frac{C}{2} - 2\cos B \cot\frac{B}{2}$

বা, $\cos A \cot\frac{A}{2} + \cos C \cot\frac{C}{2} - 2\cos B \cot\frac{B}{2} = 0$

বা, $\cos A \cot\frac{A}{2} + \cos C \cot\frac{C}{2} = 2\cos B \cot\frac{B}{2}$

$\therefore \cos A \cot\frac{A}{2}, \cot B \cot\frac{B}{2}, \cos C \cot\frac{C}{2}$ সমান্তর প্রগমন শ্রেণীভুক্ত।

উদাহরণ 9: যে কোন ত্রিভুজে প্রমাণ করুন $a \cos A+b \cos B+c \cos C = 4R.\sin A \sin B \sin C$

সমাধান: $a \cos A + b \cos B + c \cos C = 2R \sin A \cos A + 2R \sin B \cos B + 2R \sin C \cos C$

$= R\sin 2A + R\sin 2B + R\sin 2C = R [\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C]$

$= R [2\sin(A+B) \cos(A-B) + 2\sin C \cos C] = R[2\sin(\pi - C)\cos(A-B) + 2\sin C \cos C]$

$= R[2\sin C \cos(A-B) + 2\sin C \cos C] = 2R\sin C [\cos(A-B) + \cos C]$

$= 2R\sin C [\cos(A-B) + \cos\{\pi-(A+B)\}] = 2R\sin C [\cos(A-B) - \cos(A+B)]$

$= 2R\sin C.2\sin A \sin B = 4R\sin A\sin B \sin C$

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৮.১২

যে কোন ত্রিভুজে প্রমাণ করতে হবে:

1. $\frac{a-b}{a+b} = \tan\frac{A-B}{2} \tan\frac{C}{2}$
2. (i) $a(\cos C-\cos B) = 2(b-c) \cos^2\frac{A}{2}$

   (ii) $a(\cos B+\cos C) = 2(b+c) \sin^2\frac{A}{2}$
3. $a \sin(B-C) + b \sin(C-A) + c \sin(A-B) = 0$
4. $(b+c-a) \tan\frac{A}{2} = (c+a-b) \tan\frac{B}{2} = (a+b-c) \tan\frac{C}{2}$
5. (i) $a^2(\text{sn}^2B-\sin^2C) +b^2(\sin^2C-\sin^2A)+c^2(\sin A-\sin^2B) = 0$

   (ii) $a^2(\cos^2B-\cos^2C) + b^2(\cos^2C-\cos^2A) + c^2(\cos^2A-\cos^2B) = 0$
6. $\frac{a^2\sin(B-C)}{\sin B+\sin C} + \frac{b^2\sin(C-A)}{\sin C+\sin A} + \frac{c^2\sin(A-B)}{\sin A+\sin B} = 0$
7. যদি $a = 3, b = 3\sqrt{3}$ এবং $A = 30°$ হয় তবে B ও C এর মান নির্ণয় করুন।
8. যদি $c^4-2(a^2+b^2)c^2 +a^4+a^2b^2+b^4=0$ হয় তবে প্রমাণ করুন $C = 60°$ বা $120°$
9. ABC ত্রিভুজে $\tan\frac{A}{2}, \tan\frac{B}{2}, \tan\frac{C}{2}$ সমান্তর প্রগমন শ্রেণীভুক্ত হলে দেখান যে, $\cos A, \cos B, \cos C$ সমান্ড়র প্রগমন শ্রেণীভুক্ত।
10. ABC ত্রিভুজে প্রমাণ করুন, $\frac{\cos B \cos C}{bc} + \frac{\cos C \cos A}{ca} + \frac{\cos A \cos B}{ab} = \frac{1}{4R^2}$

পাঠ ৮.১৩ ব্যবহারিক

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- ত্রিভুজের বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য দেওয়া থাকলে ইপ্সিত কোণের মান নির্ণয় করতে পারবেন,
- ত্রিভুজের কোণের পরিমাণ দেওয়া থাকলে বাহুগুলোর দৈর্ঘ্যের অনুপাত নির্ণয় করতে পারবেন,
- ত্রিভুজের যেকোনো দুইটি কোণের মান এবং এক বাহুর দৈর্ঘ্য দেওয়া থাকলে ইপ্সিত বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করতে পারবেন,
- ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর দৈর্ঘ্য এবং একটি কোণের মান দেওয়া থাকলে ইপ্সিত কোণের মান নির্ণয় করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	ত্রিভুজ, বাহু, কোণ, দৈর্ঘ্য

মূলপাঠ

ত্রিভুজের বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য দেওয়া থাকলে ইপ্সিত কোণের মান নির্ণয়

সমস্য নং-1	তারিখ:

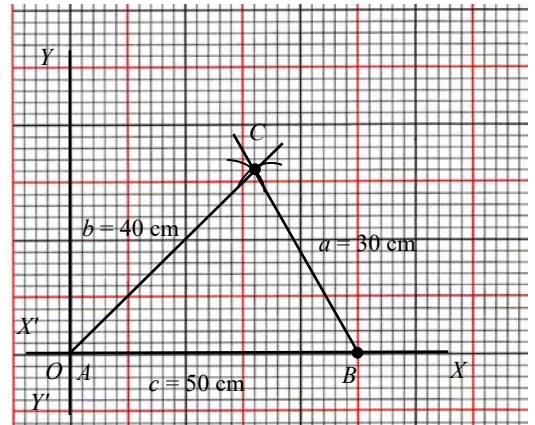
পরীক্ষণের নাম: একটি ত্রিভুজের বাহুগুলো যথাক্রমে 30 সে.মি., 40 সে.মি. এবং 50 সে.মি.। ত্রিভুজটির কোণগুলোর মান নির্ণয় করতে হবে।

সমাধান: মূলতত্ত্ব: ΔABC এর কোণগুলো নির্ণয়ের সূত্র

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},\ \cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca} \text{ এবং } \cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

প্রয়োজনীয় উপকরণ: (i) গ্রাফ পেপার (ii)স্কেল (iii)পেন্সিল (iv)কলম (v)শার্পনার (vi)ইরেজার (vii)চাঁদা (viii)পেন্সিল কম্পাস, (ix)সায়েন্টিফিক ক্যালকুলেটর

কার্যপদ্ধতি:

1. একটি গ্রাফ পেপারে স্থানাংকের অক্ষরেখা XOX' ও YOY' আঁকুন। এখানে O হলো মূলবিন্দু যার স্থানাংক $(0,0)$।
2. ধরুন $a=30$ সেমি, $b=40$ সেমি ও $c=50$ সেমি, $\angle A, \angle B$ ও $\angle C$ এর মান নির্ণয় করতে হবে।
3. ছক কাগজের উভয় অক্ষ বরাবার প্রতিটি ক্ষুদ্রতম বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য $=2$ সেমি ধরে ΔABC অঙ্কন করার জন্য OX বরাবর ক্ষুদ্রতম 25 ঘর $=50$ সেমির সমান করে $c=AB$ অংশ কাটুন।
4. পেন্সিল কম্পাসের সাহায্যে ক্ষুদ্রতম 15 ঘরের সমান $a=30$ সেমি ব্যাসার্ধ নিয়ে B কে কেন্দ্র করে একটি বৃত্তচাপ আঁকুন।
5. $b=40$ সেমি = ক্ষুদ্রতম 20 ঘরের সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে A বিন্দুকে কেন্দ্র করে একটি বৃত্তচাপ আঁকুন। ধরুন এই বৃত্তচাপ পূর্বের বৃত্তচাপকে C বিন্দুতে ছেদ করে।
6. A,C ও B,C যোগ করুন। তাহলে ΔABC উৎপন্ন হলো।
7. লেখচিত্র থেকে চাঁদার সাহায্যে $\angle A, \angle B$ ও $\angle C$ এর মান নির্ণয় করুন।

হিসাব: $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{40^2+50^2-30^2}{2\times 40\times 50}=\frac{1600+2500-900}{4000}=\frac{3200}{4000}=0.8$

$\angle A=\cos^{-1}(0.8)=36.8699^{\circ}$

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = \frac{50^2 + 30^2 - 40^2}{2 \times 50 \times 30} = \frac{2500 + 900 - 1600}{3000} = \frac{1800}{3000} = 0.6$$

$$\angle B = \cos^{-1}(0.6) = 53.13^\circ$$

$$\cos c = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{30^2 + 40^2 - 50^2}{2 \times 30 \times 40} = \frac{900 + 1600 - 2500}{2400} = \frac{2500 - 2500}{2400} = 0$$

$$\angle C = \cos^{-1}(0) = 90^\circ$$

ফল সংকলন:

a	b	c	চাঁদার সাহায্যে প্রাপ্ত মান			সূত্র থেকে প্রাপ্ত মান		
30 সেমি	40 সেমি	50 সেমি	$\angle A$	$\angle B$	$\angle C$	$\angle A$	$\angle B$	$\angle C$
			37°	53°	90°	36.8699°	53.13°	90°

মন্তব্য: লেখচিত্র থেকে চাঁদার সাহায্যে প্রাপ্ত কোণগুলোর মান ও সূত্র থেকে প্রাপ্ত মান প্রায় সমান। অতএব ফলাফল গ্রহণযোগ্য।

ত্রিভুজের কোণের পরিমাণ দেওয়া থাকলে বাহুগুলোর দৈর্ঘ্যের অনুপাত নির্ণয়

সমস্য নং-2	তারিখ:

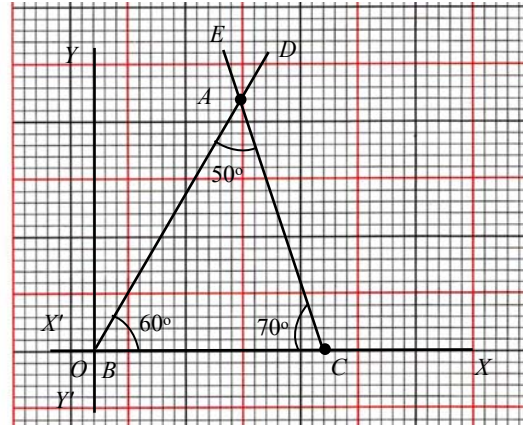
পরীক্ষণের নাম: একটি ত্রিভুজের কোণগুলো যথাক্রমে 50°, 60° এবং 70°। ত্রিভুজটির বাহুগুলোর অনুপাত নির্ণয় করতে হবে।

সমাধান: মূলতত্ত্ব: ΔABC এর বাহুগুলোর পরিমাণ নির্ণয়ের সূত্র

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

প্রয়োজনীয় উপকরণ: (i) গ্রাফ পেপার (ii) স্কেল (iii) পেন্সিল (iv) কলম (v) শার্পনার (vi) ইরেজার (vii) চাঁদা (viii) পেন্সিল কম্পাস, (ix) সায়েন্টিফিক ক্যালকুলেটর

কার্যপদ্ধতি:

1. একটি গ্রাফ পেপারে স্থানাংকের অক্ষরেখা XOX' ও YOY' আঁকুন। এখানে O হলো মূলবিন্দু যার স্থানাংক $(0,0)$।
2. ধরুন $\angle A = 50^\circ$, $\angle B = 60^\circ$ ও $\angle C = 70^\circ$, a, b ও c বাহুর অনুপাত নির্ণয় করতে হবে।
3. ছক কাগজের উভয় অক্ষ বরাবার প্রতিটি ক্ষুদ্রতম বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরুন।
4. OX থেকে $BC = 20$ একক $=$ 20 ঘর ধরে চাঁদার সাহায্যে $\angle DBC = 60^\circ$ ও $\angle ECB = 70^\circ$ আঁকুন। DB ও EC পরস্পরকে A বিন্দুতে ছেদ করে। সুতরাং $\angle BAC = 50^\circ$ হবে।
5. কম্পাস ও স্কেলের সাহায্যে AB ও AC বাহুর প্রত্যেকের দৈর্ঘ্য কত তা নির্ণয় করুন।
6. আবার সূত্রের সাহায্যে a, b, c নির্ণয় করুন। উভয় ক্ষেত্রে প্রাপ্ত মানের তুলনা করুন।

হিসাব: (i) সূত্রের সাহায্যে বাহু তিনটির অনুপাত নির্ণয়

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

বা, $a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$

বা, $a : b : c = \sin 50^\circ : \sin 60^\circ : \sin 70^\circ$

$\therefore a : b : c = 0.77 : 0.87 : 0.94 = 77 : 87 : 94$

(ii) লেখ হতে কম্পাস ও স্কেলের সাহায্যে বাহু তিনটির অনুপাত নির্ণয়

$a = BC = 20$ ঘর $= 20$ একক
$c = AB = 24.5$ ঘর $= 24.5$ একক
$b = AC = 22.5$ ঘর $= 22.5$ একক
$a : b : c = 20 : 22.5 : 24.5 = 77 : 86.6 : 94.3$ [প্রত্যেকটিকে 3.85 দিয়ে গুণ করে]

ফল সংকলন:

$\angle A$	$\angle B$	$\angle C$	কম্পাস ও স্কেলের সাহায্যে প্রাপ্ত মান	সূত্র থেকে প্রাপ্ত মান
50^o	60^o	70^o	$a : b : c = 77 : 86.6 : 94.3$	$a : b : c = 77 : 87 : 94$

মন্তব্য: কম্পাস ও স্কেলের সাহায্যে প্রাপ্ত বাহুগুলোর মানের অনুপাত ও সূত্র থেকে প্রাপ্ত বাহুগুলোর মানের অনুপাত প্রায় সমান। অতএব ফলাফল গ্রহণযোগ্য।

ত্রিভুজের যেকোনো দুইটি কোণের মান এবং এক বাহুর দৈর্ঘ্য দেওয়া থাকলে ইঙ্গিত বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয়

সমস্য নং-3	তারিখ:

পরীক্ষণের নাম: ΔABC ত্রিভুজের $\angle B = 81^o$ $\angle C = 27^o$ এবং $a = 39$ সেমি। ত্রিভুজটির অপর বাহুগুলো নির্ণয় করতে হবে।

সমাধান: মূলতত্ত্ব: ΔABC এর ক্ষেত্রে $\angle A + \angle B + \angle C = 180^o$ এবং $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$

প্রয়োজনীয় উপকরণ: (i) গ্রাফ পেপার (ii) স্কেল (iii) পেন্সিল (iv) কলম (v) শার্পনার (vi) ইরেজার (vii) চাঁদা (viii) পেন্সিল কম্পাস, (ix) সায়েন্টিফিক ক্যালকুলেটর

কার্যপদ্ধতি:

1. একটি গ্রাফ পেপারে স্থানাংকের অক্ষরেখা XOX' ও YOY' আঁকুন। এখানে O হলো মূলবিন্দু যার স্থানাংক $(0,0)$।
2. $\angle A + \angle B + \angle C = 180^o$ থেকে $\angle A = 180^o - 81^o - 27^o = 72^o$ নির্ণয় করুন। $\angle B = 81^o$ $\angle C = 27^o$ এবং $a = 39$ সেমি হলে b ও c বাহুর মান নির্ণয় করতে হবে।
3. ছক কাগজের উভয় অক্ষ বরাবার প্রতিটি ক্ষুদ্রতম বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্যকে 2 একক ধরুন।
4. OX থেকে $BC = a = 39$ অংশ কেটে নিন।
5. চাঁদার সাহায্যে $\angle DBC = 81^o$ ও $\angle ECB = 27^o$ আঁকুন। DB ও EC পরস্পরকে A বিন্দুতে ছেদ করে।
6. গ্রাফ থেকে চাঁদার সাহায্যে $\angle A$ এর মান এবং কম্পাস ও স্কেলের সাহায্যে $AB = c$ ও $AC = b$ বাহুর প্রত্যেকের দৈর্ঘ্য কত তা নির্ণয় করুন।

হিসাব: $\angle A$ এর মান নির্ণয়

(i) চাঁদার সাহায্যে $\angle A = 72^o$

(ii) সূত্রের সাহায্যে $\angle A + \angle B + \angle C = 180^o$ থেকে $\angle C = 180^o - 81^o - 27^o = 72^o$

$AB = c$ ও $AC = b$ বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয়

(i) সূত্রের সাহায্যে বাহু তিনটির অনুপাত নির্ণয়

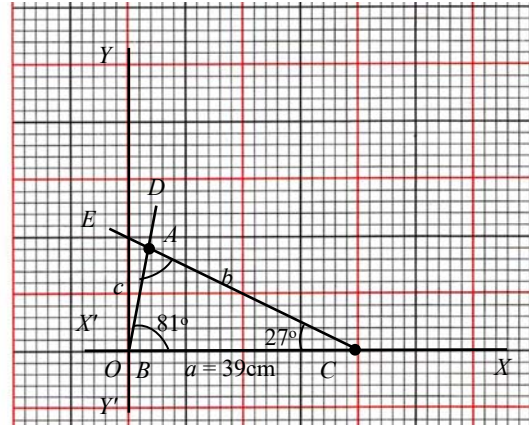
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

বা, $b = \dfrac{a}{\sin A}\sin B = \dfrac{39.\sin 81^o}{\sin 72^o} = \dfrac{39 \times 0.99}{0.93} = 41.52$

আবার, $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{c}{\sin C}$

বা,

$$c = \frac{a}{\sin A}\sin C = \frac{39.\sin 27^o}{\sin 72^o} = \frac{39 \times 0.45}{0.93} = 18.87$$

(ii) লেখ হতে কম্পাস ও স্কেলের সাহায্যে বাহু তিনটির অনুপাত

নির্ণয়

$b = AC = 20.5$ ঘর $= 41$ একক

$c = AB = 9.5$ ঘর $= 19$ একক

ফল সংকলন:

a	$\angle B$	$\angle C$	কম্পাস ও স্কেলের সাহায্যে প্রাপ্ত মান			সূত্র থেকে প্রাপ্ত মান		
30 সেমি	81°	27°	b	c	$\angle A$	b	c	$\angle A$
			41	19	72°	41.52	18.87	27°

মন্তব্য: কম্পাস ও স্কেলের সাহায্যে প্রাপ্ত বাহুগুলোর মান ও সূত্র থেকে প্রাপ্ত বাহুগুলোর মান প্রায় সমান। আবার চাঁদার সাহায্যে প্রাপ্ত কোণের মান ও সূত্র থেকে প্রাপ্ত কোণের মান প্রায় সমান অতএব ফলাফল গ্রহণযোগ্য।

উত্তরমালা

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৮.১

1. (i) $-\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (iii) $\sqrt{2}$ (iv) 0 (v) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (vi) -1
   (vii) $-\sqrt{3}$
2. (i) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (ii) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ (iii) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (iv) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (v) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (vi) $-\frac{2}{\sqrt{3}}$
3. (i) 1 (ii) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (iii) $-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+4\right)$ (iv) 3
5. (i) 2 (ii) 2 (iii) 3 (iv) 0
6. $\frac{1}{2}$ 7. (i) 300° (ii) $\frac{2\pi}{3}$
8. (i) 60° (ii) 30°, 330° (iii) 30°, 150°, 210°, 330° (iv) 60°, 300°
   (v) 30°, 135°, 150°, 315°

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৮.২

1. (i) $\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$ (ii) $\frac{1}{4}(\sqrt{2}-\sqrt{6})$ (iii) $\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{6})}{(\sqrt{2}-\sqrt{6})}$ (iv) $\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ (v) $-\frac{(\sqrt{3}+1)}{2\sqrt{2}}$
   (vi) $\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$ (vii) $(\sqrt{2}-\sqrt{6})$ (viii) $\sqrt{6}+\sqrt{2}$ (ix) $\sqrt{2}+\sqrt{6}$ (x) $-(2+\sqrt{3})$
2. (i) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (ii) $\frac{1}{2}$ (iii) $\frac{1}{2}$ (iv) 1
3. (i) 1 এবং 0 (ii) $-\frac{278}{29}$ এবং $\frac{1}{2}$ (iii) $-\frac{85}{36}$